

48 2 1

ISTITUZIONI
DI
ARITMETICA

DI
GABRIELE FERGOLA

PROFESSORE DI ASTRONOMIA NELLA REGIA
UNIVERSITA' DI NAPOLI

SECONDA EDIZIONE

~~—————~~

NAPOLI
DALLA TIPOGRAFIA DEL SEBETO

—
1845





AVVERTIMENTO

Ciascun Autore, che Istituzioni di scienze egli scrisse, s' impegnò certamente di adempiere all' oggetto principale, che ei si propose; cioè di ordinarle in quella guisa, che si avea formato nella sua mente. Adunque alla molto diversa maniera di pensare degli uomini deesi certamente attribuire, che di una medesima Scienza molte Istituzioni si trovino già pubblicate. Ora essendomi avveduto, che ad alcune opere di Aritmetica manchino esatte definizioni, ed altre di chiarezza nel dimostrare, non che di certe nozioni che ho creduto necessarie a dovervisi inserire, ho stimato rendere di pubblica ragione questo mio abbenchè tenue lavoro.

NOZIONI PRELIMINARI

A L

CORSO DI MATEMATICA

§. 1. *Def. I.* Ogni cosa, che è divisibile in parti, e che può ricevere accrescimento o diminuzione, dicesi *grandezza* o *quantità*.

§. 2. *Cor.* Dunque sono grandezze i corpi, che ci circondano, lo spazio nel quale ci troviamo, la distanza di un luogo da un altro, la velocità colla quale un corpo si muove, la forza che lo spinge, il tempo che da esso impiegasi a percorrere un certo sentiero, l'aggregato di più cose uguali, ed altre simili.

§. 3. *Def. II.* Le grandezze si distinguono in *continue* e *discrete*.

§. 4. *Def. III.* Chiamasi *grandezza continua* quella, le cui parti vi sono talmente unite, che non si possono distinguere e numerare.

§. 5. *Scol.* Tali sono la distanza di un luogo da un altro, lo spazio nel quale ci troviamo, il tempo, la velocità colla quale un corpo si muove, ed altre tali.

§. 6. *Def. IV.* Una grandezza dicesi *discreta*, se le parti di essa sono l'una dall'altra distinte, tal che si possano conoscere e numerare.

Risch. Un corpo qualunque è una quantità continua; poichè le parti di esso non si possono numerare. Ma qualora quel corpo si consi-

dera come parte dell' aggregato di più corpi , ciascuno uguale ad esso ; di tale aggregato si conoscono e numerano le parti , le quali sono tante per quanti sono quei corpi.

§. 7. *Cor.* Adunque le grandezze continue col rapportarle a certe unità si riducono sotto l'apparenza di discrete. Di fatti se per es. la distanza di un luogo da un altro si rapporti ad una certa misura , come al palmo napoletano, si potrà quella distanza dinotare per un certo numero di palmi. Questi palmi saranno le parti di quella distanza , la quale essendo una grandezza continua si presenta sotto l'apparenza di discreta.

§. 8. *Def. V.* Quella facoltà , che ha per soggetto le grandezze , dicesi *Matematica*: ed essa divide in due parti , di cui una esamina le grandezze continue , e l'altra considera le grandezze discrete e le continue sotto la mentita forma di discrete.

§. 9. *Def. VI.* Quella parte della Matematica , che ha per soggetto le grandezze continue , dicesi *Sintetica* : e quella , che ha per soggetto le grandezze discrete e le continue sotto l'apparenza di discrete , chiamasi *Matematica Analitica* , ovvero *Analisi*.

§. 10. *Scol.* E poichè in ogni scienza , che dettar si voglia , è uopo che le principali nozioni , e i vocaboli in essa usati si esponcano ; perciò quaggiù le definizioni necessarie a premettersi dichiarerò convenevolmente.

§. 11. *Def. VII.* La *definizione* consiste nella chiara e precisa spiegazione di una cosa ovvero di una parola.

§. 12. *Def. VIII.* I principii , dai quali si

deducono tutte le verità sulle grandezze, ovvero per mezzo dei quali si eseguono alcune operazioni sulle grandezze medesime, sono gli *assiomi* ed i *postulati*.

§. 13. *Def. IX.* L' *assioma* è una verità, che si comprende senza che vi sia bisogno di dimostrazione.

§. 14. *Def. X.* Il *postulato* è un principio di Scienza, che si dee concedere, perchè chiaro è facile.

§. 15. *Def. XI.* Le verità, che con alcuni ragionamenti si rilevano dai postulati e dagli assiomi, come pure da altre verità anteriormente dimostrate, diconsi *Teoremi*.

§. 16. *Def. XII.* Quelle operazioni, che si propongono a fare sulle grandezze per mezzo dei postulati o di altre operazioni già eseguite sulle grandezze medesime, si dicono *Problemi*.

§. 17. *Def. XIII.* I Teoremi ed i Problemi si dicono generalmente *Proposizioni*.

§. 18. *Def. XIV.* Il *Lemma* è una proposizione, in cui si stabilisce una verità, ovvero si esegue un'operazione, che dee servire per la dimostrazione di un Teorema, ovvero per lo scioglimento di un Problema.

§. 19. *Def. XV.* Il *Corollario* è una conseguenza, che si deduce da qualche proposizione già dimostrata.

§. 20. *Def. XVI.* Lo *Scolio* è un'aggiunzione, che fassi a qualche Proposizione, per rendere più chiara la dottrina in essa esposta.

§. 21. *Def. XVII.* Ogni Proposizione Matematica suol contenere cinque parti, che si dicono *enunciazione in astratto*, *dichiarazione*, *costruzione*, *dimostrazione* e *conclusione*: e di queste talvolta nei Teoremi manca la costruzione.

§. 22. *Def. XVIII.* Nell'enunciazione di ogni Teorema vi si contengono due parti, di cui la prima dicesi *Ipotesi*, e l'altra *Tesi*.

§. 23. *Def. XIX.* L'*Ipotesi* è ciò che si assume per vero in un Teorema, e la *Tesi* è quella verità che si vuol rilevare dalla detta *Ipotesi*.

§. 24. *Def. XX.* Nell'enunciazione di quasi tutti i Problemi vi si contengono due parti, che si dinotano coi nomi di *dati* e *quesiti*.

§. 25. *Def. XXI.* I *dati* sono quelle cose, che si concedono in Problema per esibire le altre, che si domandano, e che diconsi *quesiti*.

ISTITUZIONI

DI

ARITMETICA.

C A P. I.

PRINCIPII GENERALI DELLA NUMERAZIONE.

§. 1. *Def. I.* Ogni cosa, che si concepisce indivisa in se stessa, ma distinta e separata da ogni altra, dicesi *unità*.

§. 2. *Def. II.* Il *numero* è quello che dinota l'aggregato di più unità o di alcune parti di essa: e l' medesimo dicesi *intiero* o *fratto* secondochè rappresenta unità intiere ovvero alcune parti dell' unità.

§. 3. *Def. III.* I numeri intieri non maggiori del nove, si dicono *numeri semplici*: e si chiamano *composti* quei numeri intieri maggiori del nove.

§. 4. *Def. IV.* L' *Aritmetica* è la scienza dei numeri.

§. 5. *Post. I.* I numeri semplici vengono dinotati dagli Aritmetici colle seguenti cifre:

1	, che si pronunciano	uno
2		due
3		tre
4		quattro
5		cinque
6		sei
7		sette
8		otto
9		nove:

ed a queste cifre vi si aggiunge l'altra *o*, che pronunciasi *zero*, la quale da se sola non ha valore alcuno, ma posta a destra delle cifre, che ne dinotano un qualunque numero, ne forma un altro, il quale pareggia il numero dinotato da quelle cifre preso dieci volte.

§. 6. *Post. II.* Qualora ad un numero, che si scrive con una delle cifre dei numeri semplici ed uno o più zeri, vuolsi aggiungere un numero semplice; la cifra, onde questo vien dinotato, si scrive in luogo dell'ultimo zero, che trovasi in quel numero.

§. 7. *Cor. I.* Dunque se a destra del numero semplice 5 pongasi la cifra *o*, ne risulta l'altro numero 50, che pronunciasi *cinquanta*, e che adegua il 5 preso dieci volte. E ponendo a destra del numero 50 un altro *o*, ne dovrà risultare il numero 500, che pronunciasi *cinquecento*, e che pareggia il numero 50 preso dieci volte, e così appresso.

§. 8. *Cor. II.* E quindi qualora alla destra di un numero semplice, per rapporto a chi scrive, vi si ponga un *o*; ogni unità di quel numero semplice dovrà prendere il valore di una decina: se pongansi a destra del medesimo numero semplice due *o*; ogni unità di esso acquisterà il valore decuplo della decina, o sia acquisterà il valore di un centinajo. Ponendo tre *o* a destra di un numero semplice; ogni unità di esso dovrà acquistare il valore decuplo del centinajo, ovvero acquisterà il valore di un migliajo: e ponendo a destra di un numero semplice quattro *o*; ogni unità di esso prenderà il valore decuplo del migliajo, e'l numero, che ne risulta, dinoterà tante diecine di migliaja per

quante sono le unità del numero semplice. Nello stesso modo coll'accozzamento di altri zeri alla destra di quel numero semplice si potranno formare le centinaja di migliaia, le unità, le le diecine, e le centinaja di milioni,

le { unità
diecine } di migliaia di milioni,
e le centinaja

le { unità
diecine } di bilioni,
e le centinaja

ec.

§. 9. *Cor. III.* In oltre se al numero 50 si debba aggiungere il numero semplice 7, questo si dovrà scrivere (§. 6.) in luogo della cifra 0, e'l numero 57, che ne risulta, si dovrà pronunciare *cinquanta-sette*. Che se alla destra di questo numero 57 scrivasi la cifra 0, ne risulterà il numero 570, il quale pronunciasi *cinquecento-settanta*, e che adegua il 57 preso dieci volte, ovvero il 50 preso dieci volte aggiunto al 7 preso dieci volte. Ma il 50 preso dieci volte pareggia 5 centinaja, e'l sette preso dieci volte adegua sette diecine. Dunque nel numero 570 procedendo dalla destra verso la sinistra non vi s'incontrano unità, ma vi sono sette diecine, e 5 centinaja: e nel numero 5700, che è il decuplo di 570, procedendo dalla destra verso la sinistra, non vi s'incontrano unità nè diecine, ma vi sono 7 centinaja e 5 migliaia.

§. 10. *Cor. IV.* Che se poi al numero 5700 debbasi aggiungere il numero semplice 4, questo dovrà porsi in luogo dell'ultimo 0. Onde ne

dovrà risultare il numero 5704, che pronunciasi *cinquemila-settecentoquattro*: ed in esso procedendo dalla destra verso la sinistra vi s'incontrano 4 unità, ma vi mancano le diecine, in seguito vi sono 7 centinaja, ed in fine si trovano 5 migliaja.

§. 11. *Cor. V.* E di quì apparisce, 1.^o che per mezzo delle nove cifre e dello zero si possa scrivere un qualunque numero; 2.^o che ogni cifra di un numero composto, oltre al valore delle unità, che contiene, e che dicesi *valore nominale*, ne ha un altro, che dipende dal luogo, che essa occupa in quel numero composto, e che dicesi *valore locale*.

§. 12. *Scol.* Se l'unità dividasi in un qualunque numero di parti tra se uguali, queste insieme prese dovranno pareggiare quell'unità. Onde se prendasi per unità una di tali parti; la prima ne verrà rappresentata dal numero delle parti in che essa è stata divisa. E per tal ragione l'unità non è una grandezza assoluta, ma è una convenzione mediante la quale una grandezza qualunque dicesi una.

§. 13. *Def. V.* Quei numeri, le cui unità non si riferiscono ad alcuna grandezza, si dicono *numeri astratti*: e si chiamano *numeri concreti* quelli, le cui unità si riferiscono ad una qualunque grandezza.

§. 14. *Cor.* Adunque *cinque o cinque volte, nove o nove volte*, ec. sono numeri astratti, perchè le loro unità non si riferiscono ad alcuna grandezza: e sono numeri concreti *tre canne, cinque miglia*, ec, poichè le unità di questi si riferiscono alla canna, al miglio ec.

§. 15. *Def. VI.* I *numeri omogenei* sono

quelli, che dinotano grandezze dello stesso genere, ancorchè le loro unità differiscano in valore. E si dicono *eterogenei* quei numeri, che rappresentano grandezze di diverso genere.

§. 16. *Sol.* Da quanto si è stabilito nel §. 8. apparisce, 1.º che in ogni numero composto procedendo dalla destra verso la sinistra s'incontrano nell'ordine seguente, *le unità, le decine, e le centinaja semplici*, di poi *le unità, le decine e le centinaja di migliaia*, in seguito *le unità, le decine e le centinaja di milioni*, *le unità, le decine e le centinaja di migliaia di milioni*, e così in appresso, 2.º e che mancando una o più cifre, che ne dinotano le unità, le decine, ec. i luoghi, ov'esse andrebbero poste vengono suppliti dagli zeri. E da quì risultano le soluzioni dei due problemi, che quaggiù vengono proposti.

PROP. I. PROBL.

§. 17. *Dato un numero, esprimerne il valore.*

Sol. Il numero dato, per mezzo di alcune virgole, procedendo dalla destra verso la sinistra si divida in membri, ciascuno dei quali contenga solo tre figure, eccetto l'ultimo, che può contenerne due, ed anche una. Di poi sulle prime cifre a destra del primo, del terzo, del quinto, ec. membro vi si scrivano rispettivamente le cifre 0, 1, 2, 3, 4, ec.

E poichè i numeri sopra i quali sono scritte le cifre 0, 1, 2, 3, ec. sono rispettivamente (§. 8.) le unità semplici, le unità di milioni, le unità di bilioni ec.; l'è chiaro, 1.º che le cifre poste alla sinistra di essi debbano rappresentare rispettiva-

mente le decine di unità, le decine di milioni, le decine di bilioni, ec; 2.^o che gli altri numeri, che verso la sinistra seguono quelle decine, debbano dinotare rispettivamente le centinaja di unità, le centinaja di milioni, le centinaja di bilioni, ec; 3.^o che le prime cifre a destra del secondo, quarto, sesto ec. membro debbano dinotare rispettivamente le unità di migliaia, le unità di migliaia di milioni, le unità di migliaia di bilioni, ec. Nello stesso modo dovrà procedersi appresso (§. 8.). Dunque bisognerà pronunziare *milioni*, *bilioni*, *trilioni*, ec. allora che si leggono quei numeri, cui vanno sovrapposte rispettivamente le cifre 1, 2, 3, ec.; bisognerà pronunziare *migliaja* ovvero *mila* allora che si leggono gli ultimi numeri di quei membri, cui non ritrovasi sovrascritta alcuna delle cifre 0, 1, 2, 3, ec.

Esempio. Vogliasi esprimere il valore del numero *A*.

A $31,503,264,258,903$

Fatte le operazioni quassù indicate, il valore del numero *A* così esprimerassi, cioè *trentuno bilioni cinquecento-tremila, duecento sessanta-quattro milioni, duecento cinquantotto mila novecento-tre.*

PROP. II. PROBL.

§. 18. *Scrivere un numero, di cui ne sia espresso il valore.*

Sol. Si osservi se nel pronunziare il numero, che vogliasi scrivere, cada nel principio la parola *mila*, ovvero una delle altre *milioni*, *bi-*

lioni, *trilioni*, ec. Nell' uno e nell' altro caso si pronuncii da capo il numero fino alla prima di quelle parole, e dopo questo numero si ponga una virgola. Ma nel secondo caso, oltre alla virgola, sull' ultima cifra a destra del numero già scritto vi si ponga pure una delle seguenti cifre 1, 2, 3, ec. secondochè nel pronunciare il numero, che vogliasi scrivere, s' incontri a principio una delle parole *milioni*, *bilioni*, *trilioni*, ec. Di poi si pronuncii il restante del detto numero, e collo stesso mezzo si scrivano gli altri ternarii di esso fino a che si pervenga alle unità semplici, se però non vi sia interruzione nell' ordine delle cifre del numero proposti a scrivere. Che se poi si osservi qualche interruzione nell' ordine delle cifre; in tal caso le cifre mancanti si suppliscano con gli zeri.

Esempio. Vogliasi scrivere con cifre il numero

Cinquecento-trenta trilioni, quattrocento-venticinque mila seicento bilioni, novecento-trenta mila ottocento-due.

Si leggano le parole, che precedono l' altra *trilioni*, e si scriva il numero 530, che vien espresso con quelle parole. Di poi si ponga la virgola dopo lo zero del 530, ed il 3 per di notare i *trilioni* sopra l' ultima cifra 0 dello stesso numero 530. In oltre nell' espressione del numero, che vuolsi scrivere, si lascino le parole *cinquecento-trenta trilioni*, e si legga il resto fin dove s' incontri la prima volta la parola *mila*, che vien riferita ai bilioni: e se in questa lettura si trovino le centinaia le decine e le unità si scriva il ternario, che deve dinotarle, altrimenti vi si suppliscano gli zeri. Nella stessa guisa dovrà procedersi appresso. Dun-

que il numero, di cui n'è data l'espressione, dev'essere il seguente

$$\overset{3}{5}30,\overset{2}{4}25,\overset{1}{6}00,000,\overset{0}{9}30,802.$$

C A P. II.

DEL CALCOLO DEI NUMERI INTIERI.

§. 19. *Def. VII.* La *somma* è un'operazione colla quale si ottiene un numero, che pareggia più numeri dati omogenei insieme presi.

§. 20. *Scol.* Il segno col quale suole indicarsi la somma di due o più numeri è il seguente $+$, che si pronuncia *più*. Tal che se vogliasi indicare la somma di 5 e 7, converrà scrivere $5+7$, che pronunciasi *cinque più sette*.

§. 21. *Def. VIII.* La *sottrazione* è un'operazione colla quale si determina la differenza tra due numeri omogenei. Il maggiore dei numeri dati dicesi *diminuendo*, il minore *sottrattore*, e la differenza, che con questa operazione si ottiene, chiamasi *residuo*.

§. 22. *Scol.* La sottrazione di un numero da un altro viene indicata col seguente segno—, che si pronuncia *meno*. Così p. e. dovendosi sottrarre 3 da 8, converrà scrivere $8-3$, che pronunciasi *otto meno tre*.

§. 23. *Def. IX.* La *moltiplica* è un'operazione aritmetica colla quale dati due numeri se ne determina un altro, che adegua uno di essi preso tante volte quante sono le unità dell'altro. Il primo di questi numeri dicesi *moltiplicando*, il secondo *moltiplicatore*, quel numero, che si ottiene, chiamasi *prodotto*, e l' multi-

plicando e 'l moltiplicatore si chiamano pure ¹⁷ *fattori* del prodotto.

§. 24. *Scol.* La moltiplica di due numeri viene indicata col seguente segno $\times$, ovvero ponendo un punto tra i numeri da moltiplicarsi, o scrivendo i due fattori in due parentesi, e con altri segni ancora. Tal che dovendosi moltiplicare 13 per 27, il prodotto potrà esserne indicato tanto da 13×27 , che da 13. 27. Così pure dovendosi moltiplicare la somma di 5 e 9 per quella di 13 e 17, un tal prodotto ne sarà indicato da una delle seguenti espressioni.

$(5+9)(13+17)$, $\overline{5+9 \times 13+17}$, $(5+9) \cdot (13+17)$, e $5+9.13+17$.

§. 25. *Def. X.* La *divisione* è un' operazione aritmetica colla quale dati due numeri se ne vuol trovare un terzo, che dinoti quante volte uno di essi numeri si contenga nell' altro. Quello dei numeri dati, che debba un certo numero di volte contenere l' altro, si dirà *dividendo*: quello poi, che si contenga, si chiamerà *divisore*, e l' altro, che colla divisione ne risulti, dirassi *quoto o quoziente*.

Talvolta, dovendosi dividere un numero intero per un altro minore di esso, accade, che questo secondo non si contenga un esatto numero di volte nel primo, tal che il divisore preso un certo numero di volte dia un prodotto minore del dividendo, e da cui ne differisca per un numero minore dello stesso divisore. In tal caso ciò che resta nella divisione dirassi *residuo*.

§. 26. *Cor.* E poichè il prodotto di due numeri contiene tante volte uno di essi, quante sono le unità dell' altro; l' è chiaro, che se di-

vidasi quel prodotto per uno dei suoi fattori, ne dovrà risultare l'altro fattore.

§. 27. *Scol. I.* La divisione di un numero per un altro viene indicata con diversi segni; tal che delle seguenti espressioni

$12 : 3$, $(3+17-2) : (5-4+8)$, $\overline{3+17-2} : \overline{5-4+8}$
la prima dinota il quoto, che si ha dividendo 12 per 3, e ciascuna delle altre due rappresenta il quoto di $3+17-2$ per $5-4+8$.

§. 28 *Scol. II.* Il segno col quale suole indicarsi l'uguaglianza di due numeri è il seguente $\equiv$, che pronunciasi *uguale*; tal che volendo dinotare, che la somma di 12 e 4 è uguale a 16, si scrive $12+4 \equiv 16$.

PROP. III. PROBL.

§. 29. *Dati più numeri, che sieno rapportati ad una stessa unità; prenderne la somma.*

Sol. I numeri dati si scrivano l'uno sotto dell'altro, tal che le unità di essi si trovino le une sopra le altre, le decine sulle decine, le centinaja sulle centinaja, e così in appresso. Di poi sotto di essi numeri in tal guisa disposti si distenda una linea orizzontale, e si prenda la somma di tutte le unità semplici, che sono nei medesimi numeri. Se tale somma non oltrepassi le nove unità, essa si scriva sotto la linea nella medesima direzione verticale colle unità dei numeri dati. Ma se quella somma oltrepassi le nove unità, in tal caso si dovrà scrivere soltanto l'eccesso di essa somma sulle decine, ovvero la cifra 0 nel caso che la detta somma contenga un esatto numero di decine.

In oltre, si prenda la somma delle decine

dei numeri dati, e ad essa vi si aggiungano le diecine ottenute dalla somma delle unità degli stessi numeri. Se quest'ultima somma non risulti maggiore delle nove diecine, queste si scrivano sotto la linea orizzontale, ed in direzione verticale colle diecine. Ma se quella somma oltrepassi le nove diecine, in tal caso si dovrà scrivere soltanto l'eccesso di essa sulle centinaia. Nello stesso modo dovrà procedersi in appresso. Sarà chiaro, che il numero, che risulta sotto la linea orizzontale, contenendo la somma delle unità, quella delle diecine, ec. dei numeri dati debba essere la somma di questi. C. B.F.

Esempio. Sieno dati i numeri 47093, 25806, e 1387, le cui unità sieno uguali tra loro; fa d'uopo prenderne la somma.

Si dispongano i numeri dati come quassù si è detto, e sotto di essi si distenda una linea orizzontale. Di poi si prenda la somma 16 delle unità 47093 semplici 3, 6, e 7 dei numeri dati, 25806 e l'eccesso 6 di quella somma sulla 1387 diecina si scriva sotto la linea orizzontale, ed in direzione verticale colle unità dei numeri proposti.

In oltre, alla somma 17 diecine delle diecine 9 ed 8, che sono nei numeri dati, vi si aggiunga la diecina, che si è ottenuta dalla somma delle unità degli stessi numeri. Onde si avranno 18 diecine, ovvero 8 diecine ed un centinajo. Si scrivano le 8 diecine a sinistra delle 6 unità della somma, e l'centinajo si aggiunga alla somma 11 centinaja di 8 centinaja e 3 centinaja, che sono nei numeri dati. Onde si otterranno 12 centinaja, ovvero 2 centinaja, ed un migliajo. Si scrivano le 2 centinaja a sinistra delle 8 dieci-

ne, e si prosegue il resto dell' operazione, come si è praticato finora.

PROP. IV. PROBL.

§. 30. *Esaminare se nel prendere la somma di più numeri rapportati ad una stessa unità siasi errato.*

Sol. Dopo aver sommati i numeri proposti si tira una linea tra 'l primo di essi e 'l secondo. Di poi si prenda la somma dei numeri dati, che si trovano sotto la detta linea, ed a tale somma vi si aggiunga in seguito il numero, che si trova sopra la stessa linea. Sarà chiaro, che quest' ultima somma debba essere un numero uguale alla somma dei numeri dati, se l' operazione fu bene eseguita.

PROP. V. PROBL.

§. 31. *Dati due numeri disuguali, e rapportati ad una medesima unità, sottrarre il minore di essi dal maggiore.*

Sol. Sieno dati i due numeri disuguali 34062 e 5839, e rapportati ad una stessa unità; fa d' uopo sottrarre dal maggiore di essi 34062 il minore 5839.

Si dispongano i due numeri in modo che le unità, decine, centinaia, ec. del diminuendo 34062 corrispondano sulle unità, decine, centinaia, ec. del sottrattore, e sotto di essi distendasi una linea orizzontale.

E poichè le nove unità del sottrattore sono maggiori delle due unità del diminuendo, se prendasi una diecina del diminuendo, e si ag-

giunga alle due unità di essa, si avranno in tal modo 12 unità del diminuendo, da cui se ne debbono togliere 9 unità, che sono nel sottrattore. Onde si otterranno 3 unità per residuo di questa prima operazione, e 'l numero 3 si dovrà scrivere sotto la linea orizzontale, ed in direzione verticale colle unità del diminuendo e del sottrattore. Ma siccome in questa prima operazione una diecina del diminuendo si è ridotta ad unità, l'è chiaro, che nel diminuendo vi restano solo 5 diecine, da cui se ne devono togliere 3 diecine, che sono nel sottrattore: ed in tale operazione si ottengono 2 diecine per residuo; il numero 2 si dovrà scrivere a sinistra del 3 ottenuto nella prima operazione. In oltre, poichè nel diminuendo vi mancano le centinaja, per togliere da esso le 8 centinaja del sottrattore si dovrà ridurre un migliajo del diminuendo a 10 centinaja. Ma togliendo 8 centinaja da 10 centinaja si ottengono 2 centinaja. Dunque il numero 2, che dinota le centinaja del residuo, si dovrà scrivere a sinistra dell'altro 2, che ne dinota le diecine. Dippiù essendosi un migliajo del diminuendo ridotto a 10 centinaja, le 4 migliaja di esso si trovano ora ridotte a 3. Il perchè non potendosi togliere le cinque migliaja del sottrattore dalle tre migliaja del diminuendo, converrà ridurre una diecina di migliajo del diminuendo a 10 migliaja, che aggiunte alle 3 migliaja, che vi sono restate dalla precedente operazione, formano 13 migliaja, da cui togliendone 5 dovranno rimanerne 8: e 'l numero 8 si dovrà scrivere a sinistra del 2 ottenuto dalla precedente operazione. Finalmente, essendosi ridotta una diecina di migliajo del diminuendo a 10 miglia-

ja, le 3 diecine di migliaja del diminuendo si trovano ora ridotte a 2, da cui non devesi sottrarre alcuna diecina di migliajo, poichè queste mancano nel sottrattore. Dunque scrivendo il numero 2 a sinistra dell' 8 ottenuto nella precedente

<i>Diminuendo</i>	34062	operazione, si avrà sotto la
<i>Sottrattore</i>	5839	linea orizzontale il numero
<i>Residuo</i>	28223	28223, che dinota la differenza dei numeri dati. C.B.F.

PROP. VI. PROBL.

§. 32. *Esaminare se nel sottrarre un numero da un altro rapportato alla stessa unità che il primo siasi commesso errore.*

Sol. E poichè in ogni sottrazione il residuo dinota di quanto il diminuendo supera il sottrattore, l'è chiaro, che se l'operazione sia stata bene eseguita, la somma del sottrattore e del residuo debba pareggiare il diminuendo. Altrimenti dovrà farsi di nuovo la sottrazione. C.B.F.

PROP. VII. TEOR.

§. 33. *Se nella Tavola ABCD di rincontro ai numeri 1, 2, 3, 4, 5, ec, che sono posti nella prima riga orizzontale AB, si scrivano i doppii, i tripli, i quadrupli, ec. di essi numeri nelle rispettive colonne verticali; per mezzo della stessa tavola, che dal suo inventore Pittagora chiamasi tavola Pittagorica, si potranno ottenere tutti i prodotti, i cui fattori si trovano nella prima linea orizzontale AB, e nella prima linea verticale AD.*

Dim. Poichè ogni numero, che si prende nella descritta tavola, è uguale a quello, che sta al

principio della colonna verticale, ove lo stesso numero si ritrova, preso tante volte quante sono le unità, che si contengono nel primo numero, che sta nella stessa direzione orizzontale col numero preso nella detta tavola. Il perchè quel numero, che si prende nella tavola Pittagorica, dee dinotare il prodotto, i cui fattori si trovano nei primi luoghi delle due linee orizzontale e verticale, e che s'incontrano nel sito, ove sta posto quel numero. Così p. es. il numero 42, che ritrovasi nella sesta colonna verticale, dee dinotare il prodotto di 6, che sta a principio della sesta colonna, nel numero 7, che trovasi in primo luogo della riga orizzontale, ove sta posto il 42.

A

B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

D

C

§. 34. *Cor. I.* E poichè i numeri della prima colonna verticale AD della tavola Pittagorica sono quegli stessi, che si trovano nella prima riga orizzontale AB della medesima tavola; devono essere i numeri della seconda colonna verticale della tavola Pittagorica quei medesimi, che collo stesso ordine sono nella seconda riga orizzontale: i numeri della terza colonna verticale devono essere gli stessi degli altri, che si trovano nella terza colonna orizzontale: lo stesso si dica delle rimanenti colonne.

§. 35. *Cor. II.* Adunque il prodotto di due numeri dovrà essere sempre lo stesso o che si prenda il primo di essi nella riga orizzontale AB e'l secondo nella colonna verticale AD, ovvero che si prenda il secondo nella riga AB e'l primo nella colonna AD. Vale a dire, che *due numeri moltiplicati tra loro danno sempre lo stesso prodotto o che si moltiplichi il primo di essi pel secondo, ovvero il secondo pel primo.*

§. 36. *Cor. III* Essendo 120 il decuplo di 12, il prodotto di 120 per 15 dev'essere decuplo di quello, che si ha moltiplicando 12 per 15. Ma il decuplo del prodotto di 12 per 15 si ottiene ponendo un 0 a destra di questo prodotto (§. 5.). Dunque il prodotto di due numeri, dei quali uno termini collo zero, si ottiene moltiplicando tra loro quei due numeri senza considerarvi lo zero, e poi scrivendo un zero a destra del prodotto.

§. 37. *Cor. IV.* In oltre, essendo 1200 il centuplo di 12, il prodotto di 1200 per 15 dev'essere centuplo di quello, che si ha moltiplicando 12 per 15. Ma il centuplo del prodot-

to di 12 per 15 si ottiene ponendo due zeri a destra di questo prodotto (§. 7.). Dunque il prodotto di due numeri, dei quali uno termini con due zeri, si ottiene moltiplicando tra loro gli stessi numeri senza considerarvi gli zeri, e poi scrivendo quei due zeri a destra di un tal prodotto. Ed in generale, *il prodotto di due numeri, dei quali uno termini con un qualunque numero di zeri, si ottiene moltiplicando tra loro gli stessi numeri senza considerarvi quei zeri, e poi scrivendo questi a destra del prodotto.*

§. 38. Cor. V. E' poichè 150 è il decuplo di 15, dev'essere il prodotto di 150 per 12 decuplo di quello di 15 per 12, il prodotto di 150 per 120 decuplo dell' altro di 15 per 120, ec. Ma il decuplo del prodotto di 15 per 12 si ottiene ponendo un 0 a destra di questo prodotto, il decuplo del prodotto di 15 per 120 si ottiene ponendo un zero a destra di questo prodotto, ec. Dunque *il prodotto di due numeri, ciascuno dei quali termini con un qualunque numero di zeri, si ottiene moltiplicando quei numeri senza considerarvi gli zeri, e ponendo a destra di un tal prodotto tanti zeri quanti se ne contengono in fine dei due fattori.*

§. 39. Scol. Affinchè si possa esattamente e con facilità eseguire la moltiplicazione di due numeri, fa mestieri, che si sappiano a memoria i prodotti di tutti i numeri semplici a due a due: ed a ciò vi si perviene mediante la tavola pitagorica, la quale, per questo uso cui è destinata, suole arrestarsi al numero 9 tanto nella prima riga orizzontale, che nella prima colonna verticale.

PROP. VIII. PROBL.

§. 40. *Dati due numeri, trovarne il prodotto.*

Sol. Sieno dati i numeri 57042 e 4065, fa d' uopo trovarne il prodotto.

<i>Moltiplicando</i>	57042	I. I numeri dati si scri-
<i>Moltiplicatore</i>	4065	vano l' uno sopra del-
	<u>285210</u>	l' altro, e sotto di essi
	3422520	si distenda una linea
	<u>228168000</u>	orizzontale. Sarà chia-
<i>Prodotto</i>	231875730	ro che il prodotto di

di 57042 per 4065 debba essere lo stesso che il numero 57042 preso 5 volte aggiunto allo stesso numero preso 60 volte, insieme col medesimo numero preso 4000 volte; poichè la somma dei numeri 5, 60, e 4000 pareggia 4065. Dunque se moltiplicasi prima il numero 57042 per 5, di poi per 6, ed a destra di questo prodotto vi si ponga un 0 (§. 37.), e finalmente si moltiplichi lo stesso numero 57042 per 4, ed a destra del prodotto vi si pongano tre zeri (§. 37.); la somma di tutti questi prodotti dovrà dinotarne quello di 57042 per 4065.

II. Intanto essendo 10 il prodotto delle 5 unità del moltiplicatore per le 2 unità del moltiplicando, quella diecina non potrà scriversi nel luogo delle unità del prodotto di 57042 per 5. Si ponga dunque 0 sotto la linea. Ma essendo il prodotto di 4 diecine del moltiplicando per le 5 unità del moltiplicatore uguale a 20 diecine, ed essendosi ottenuta un' altra diecina nel prodotto di 5 per 2, dovranno essere 21 diecine, o sia 2 centinaia ed una diecina quelle,

che si contengono nel prodotto di 42 per 5. Si scriva 1 a sinistra dello zero.

III. In oltre, essendo il prodotto di 5 unità per 0 centinaja, che sono nel moltiplicando uguale a 0, nel prodotto di 57042 per 5 non vi si conterrebbero centinaja, se non vi fossero le 2 centinaja ottenute dalla moltiplicazione di 4 diecine per 5. Onde nel prodotto di 57042 per 5 dovrà porsi il numero 2, che dinota centinaja, a sinistra di 1, che dinota una diecina. Nello stesso modo si otterranno le migliaia, le diecine di migliaia, e le centinaja di migliaia del prodotto di 57042 per 5.

IV. Si moltiplichino ora 57042 per 6, e 'l prodotto 342252 si scriva sotto del primo prodotto 285210, tal che le unità 2 di quello corrispondano sotto la diecina 1 di questo, le diecine 5 di quello sotto le centinaja 2 di questo, e così delle rimanenti. Sarà chiaro, che se a destra del numero 342252 si ponga un 0, il numero 3422520, che ne risulta, dovrà dinotare (§. 37.) il prodotto di 57042 per 60.

V. Finalmente si moltiplichino 57042 per 4, e 'l prodotto 228168 si scriva sotto del secondo prodotto 3422520, tal che le unità 8 di quello corrispondano sotto tal cifra del primo prodotto 285210, che alla destra abbia tante altre cifre quante ne ha il 4 nel moltiplicatore, cioè tre. Dunque scrivendo le 8 unità del prodotto 228168 di 57042 per 4 sotto le quarte cifre di ciascuno dei due precedenti prodotti 285210 e 3422520 e ponendo a destra del prodotto 228168 tre zeri (§. 37.), la somma dei numeri 285210, 3422520, 228168000 ne dovrà dinotare l'intero prodotto di 57042 per 4065. Ma poichè

gli zeri, che sono in fine del secondo e terzo prodotto non alterano detta somma; l'è chiaro, che essi possono omettersi, badando di scrivere la prima cifra a destra del prodotto di 57042 per 6 sotto le diecine del prodotto 285210 di 57042 per 5, e la prima cifra a destra del prodotto di 57042 per 4 sotto tal cifra del prodotto 285210 di 57042 per 5, che a destra ne abbia tante altre quante ne ha il 4 nel moltiplicatore 4065, cioè tre. C. B. F.

PROP. IX. PROBL.

§. 41. *Dati due numeri disuguali, dividere il maggiore di essi pel minore.*

Sol. Sieno dati i due numeri 357085 e 542, fa d'uopo dividere il maggiore di essi pel minore.

I. Si scriva il divisore 542 a destra del dividendo 357085,

<i>Dividendo</i>	<i>Divisore</i>
357085	542
3252	<i>Quoto</i>
3188	658
2710	
4785	
4336	
<i>Resid.</i> 449	

e dal dividendo si separino dalla sinistra verso la destra tante cifre, che formino un numero non minore del divisore, e da cui togliendone l'ultima verso la destra, ne risulti un altro numero minore del divisore dato. Così nel caso proposto converrà separare dalla sinistra del dividendo le prime quattro cifre, che formano il

numero 3570 maggiore del divisore 542, e da cui toltane l'ultima cifra 0, si ottiene il numero 357, ch'è minore dello stesso divisore. Or poichè l'ultima cifra 0 del numero 3570 nel dividendo proposto trovasi nel luogo delle centinaja, quel numero dovrà dinotare centinaja, ovvero il medesimo sarà lo stesso di 357000. Onde se prendasi la cinquecento-quarantaduesima parte di 3570, questa dovrà essere la centesima parte di quella, che si ottiene dividendo 357000 per 542. Dunque se dividasi 3570 per 542, ed a sinistra del quoziente vi si pongano due 0; il numero che ne risulta, dee dinotare quante volte il 542 si contenga in 357000. Ma poichè la prima cifra 5 a sinistra del divisore si contiene 7 volte nel numero 35, che è formato dalle due prime cifre del dividendo, e la seconda cifra 4 del divisore non si contiene 7 volte nella terza cifra 7 del dividendo; l'è chiaro, che il quoto di 3570 per 542 debba essere un numero minore di 7; poichè se fosse 7, le 5 centinaja del divisore prese 7 volte formerebbero 35 centinaja, come sono nel dividendo, ma le 4 diecine del divisore prese 7 volte formerebbero 28 diecine, che sono più delle 7 del dividendo.

II. Suppongasi, che 6 dinoti il quoto di 3570 per 542. Essendo 30 centinaja il prodotto di 5 centinaja del divisore per 6 unità, sottraendo le 30 centinaja dalle 35, che sono nel dividendo 3570, si ottiene per residuo 5 centinaja, ovvero 50 diecine, che aggiunte alle 7 diecine del dividendo formano 57 diecine. Ma prendendo le 4 diecine del divisore 6 volte, ne risultano 24 diecine, che tolte da 57 diecine poc' anzi

ottenute, si ha per residuo 33 diecine, ovvero 330 unità, nel qual numero di unità il numero 2 delle unità del divisore vi si contiene pure 6 volte con un residuo: quindi è chiaro, che 6 debba essere la cifra del quoto, che dinota le centinaja. Si scriva dunque 6 da parte, e 'l prodotto 3252 di 6 per 542 si scriva sotto al numero 3570 del dividendo: di poi si sottragga 3252 da 3570, ed appresso al residuo 318 centinaja vi si ponga la seguente cifra 8 del dividendo: il numero, che ne risulta, sarà 3188 diecine. E quindi se il numero 3188 fosse minore del divisore 542, nel quoto vi mancherebbero le diecine, ed in tal caso dovrebbe porsi o a destra del 6.

III. Ma poichè il numero 3188 è maggiore di 542 il quoto 5 di 3188 per 542 si potrà ottenere collo stesso ragionamento fatto nei numeri I, e II. Si scriva intanto il 5 a destra del 6, e poi si moltiplichi il divisore 542 per 5 diecine, e 'l prodotto 2710 diecine si scriva sotto al numero 3188 diecine.

IV. In oltre, dal numero 3188 diecine si sottragga 2710 diecine, ed al residuo 478 diecine si scriva appresso il numero 5 delle unità del dividendo: il numero, che ne risulta, sarà 4785 unità. Onde se questo numero fosse minore di 542 nel quoto vi mancherebbero le unità, ed in tal caso dovrebbe porsi un o a destra del 5. Ma poichè il numero 4785 è maggiore del divisore 542; il quoto 8 di 4785 per 542 si ottiene collo stesso ragionamento fatto nei numeri I, e II. Si scriva dunque il numero 8 a destra del 5, che dinota le diecine del quoto, e 'l prodotto 4336 di 542 per 8 si sottragga da 4785;

si avrà per residuo il numero 449. C. B. F.

§. 42. *Cor. I.* E di quì si rileva, che se a sinistra del dividendo si separino tante cifre, tal ch'è da esse si formi un numero non minore del divisore, e da cui cancellandone l'ultima cifra a destra se ne formi un altro minore del divisore medesimo; il quoto dovrà contenere tante cifre quante sono le rimanenti del dividendo ed una di più.

§. 43. *Cor. II.* In oltre, in ciascuna delle sottrazioni, che devono farsi allora che vuol dividersi un numero per un altro, deve risultarne un residuo minore del divisore dato; poichè se questo residuo fosse uguale o maggiore di quel divisore, il dividendo conterrebbe per lo meno un' altra volta il divisore.

§. 44. *Cor. III.* E poichè un numero si contiene tante volte in un altro quante il primo di essi preso dieci volte si contiene nel secondo preso dieci volte, o quante volte il primo di essi moltiplicato per 100 nel secondo preso cento volte, ec., ed i prodotti di quei numeri per 10, per 100, per 1000, ec., si ottengono ponendo alla destra di essi un zero, due zeri, tre zeri, ec. Dunque se in fine del dividendo e del divisore vi sieno alcuni zeri, e da essi si cancelli uno stesso numero di zeri; il quoto della divisione di quei numeri, che risultano, sarà lo stesso di quello, che si sarebbe ottenuto senza toglierne gli zeri.

Esempio. Vogliasi dividere il numero 1637619 per l'altro 327.

I. Si separino a sinistra del dividendo quattro cifre, che formino il numero 1637 non minore del divisore dato 327, ma da cui to-

gliendo l'ultima cifra 7 si abbia il numero 163 minore di 327. Di poi si dica il 3 in 16 si contiene 5 volte col residuo 1, e ponendo 1 avanti al 3 terza cifra del dividendo si ha 13, nel quale il 2, seconda cifra del divisore vi si contiene pure 5 volte, e vi restano 3. Il 3 col 7, quarta cifra del dividendo forma 37, nel qual numero la terza cifra 7 del divisore vi si contiene 5 volte col residuo 2. Dunque dev'esser 5 la prima cifra del quoto.

<i>Dividendo</i>	<i>Divisore.</i>
1637619	327
1635	<i>Quoto</i>
	5008
2619	
2616	

Residuo 3

II. Si multipliichi ora il 5 poc' anzi ottenuto pel divisore 327, e'l prodotto 1635 si sottragga dal numero 1637, e si avrà 2 per residuo. Si aggiunga al 2 la quinta cifra 6 del dividendo, e risultando il numero 26 minore del divisore 327, si ponga lo zero dopo del 5, prima cifra del quoto. Di poi si ponga dopo del 26 la sesta cifra 1 del dividendo, e risultando il numero 261 anche minore del divisore 327, si scriva 0 per terza cifra del quoto.

III. Finalmente a destra del numero 261 si scriva l'ultima cifra 9 del dividendo, e dovrà risultarne il numero 2619 maggiore del divisore 327. Si dica ora, il 3 prima cifra del divisore, in 26 vi si contiene 8 volte rimanendone 2, il 2 posto avanti ad 1, terza cifra del numero 2619, forma 21, nel quale il 2, seconda cifra del divisore 327, vi si contiene 8 volte sopra-

vanzandone 5. Il 5 posto avanti all'ultima cifra 9 del dividendo fa 59, nel quale il 7 ultima cifra del divisore vi si contiene 8 volte rimanendone 3. Sarà dunque 8 la quarta ed ultima cifra del quoto. Si moltiplichino ora 8 per 327, e 'l prodotto 2616 sottraggasi dal numero 2619, e 'l residuo 3 si scriva sotto la linea. Dunque il richiesto quoto sarà 5008.

PROP. X. PROBL.

§. 45. *Esaminare se moltiplicando un numero per un altro siasi errato.*

Sol. E poichè in ogni moltiplica il prodotto deve contenere tante volte uno dei fattori, quante sono le unità, che si contengono nell'altro fattore; l'è chiaro, che se il prodotto supposto diviso per uno dei fattori dati dia per quoto l'altro fattore, esso dev'essere il vero prodotto di quei due numeri. C. B. F.

PROP. XI. PROBL.

§. 46. *Esaminare se nel dividere un numero per un altro siasi commesso errore.*

Sol. E poichè in ogni divisione il quoto (§. 25.) dinota quante volte il divisore si contenga nel dividendo; l'è chiaro, che se moltiplicasi il divisore pel quoto, e la somma di questo prodotto e del residuo della divisione sia uguale al dividendo, la divisione sarà stata bene eseguita. C. B. F.

DEL CALCOLO DELLE FRAZIONI.

§. 47. *Def. XI.* Se l'unità dividasi in un qualunque numero di parti tra se uguali; ogni espressione, che dinoti un certo numero di quelle, dirassi *numero fratto* o *frazione*.

§. 48. *Scol.* Ogni frazione suol dinotarsi con due numeri, dei quali uno scrivesi sotto una linea, e l'altro sopra. Il primo di essi ne dinota in quante parti uguali fu divisa l'unità, e'l secondo rappresenta il numero di quelle parti dell'unità, che costituiscono il valore della frazione. Così p. e. se l'unità dividasi in 7 parti uguali, e di questese ne prendano 3; la frazione, che dinota queste tre parti, sarà $\frac{3}{7}$, che si pronuncia *tre settimi*.

§. 49. *Def. XII.* In ogni frazione il numero, che scrivesi sopra la linea vien chiamato *numeratore*, e quello, che scrivesi sotto la linea chiamasi *denominatore*. E'l numeratore e'l denominatore di un fratto considerati insieme si dicono *termini della frazione*.

§. 50. *Cor.* Da quanto si è quassù definito si rileva, che *una frazione è minore, uguale, o maggiore dell'unità secondo che il numeratore di essa è minore, uguale, o maggiore del denominatore*.

§. 51. *Def. XIII.* Il *fratto vero* è quello, che ha il numeratore minore del denominatore. Lo *spurio* poi è quell'altro, il cui numeratore essendo maggiore del denominatore non contiene questo un esatto numero di volte. Laddove

chiamasi *fratto apparente* quello, il cui numeratore è uguale, o pure contiene un esatto numero di volte il suo denominatore.

§. 52. *Cor.* Adunque $\frac{3}{8}$ è un fratto vero; poichè il numeratore 3 di esso è minore del denominatore 8: ed è spurio il fratto $\frac{8}{3}$, il cui numeratore 8 essendo maggiore del denominatore 3 non contiene questo un esatto numero di volte. Il fratto poi $\frac{6}{3}$, è apparente; poichè il numeratore 6 di esso contiene il denominatore 3 due volte senza residuo.

PROP. XII. TEOR.

§. 53. *Ogni fratto dinota il quoziente, che si ottiene dividendo il numeratore pel denominatore.*

Dim. Dovendosi dividere p. es. il numero 4 per l'altro 9 si vuol trovare un numero, che preso 9 volte (§. 46.) pareggi 4. Ma poichè la nona parte dell' unità, o sia $\frac{1}{9}$ presa 9 volte è uguale a $\frac{9}{9}$, ovvero ad 1; il quadruplo di $\frac{1}{9}$, ovvero $\frac{4}{9}$ preso 9 volte dee pareggiare 4. Dunque la frazione $\frac{4}{9}$ dee pure dinotare il quoto, che si ha dividendo 4 per 9. C. B. D.

§. 54. *Cor. I.* E poichè il denominatore di un fratto apparente (§. 51.) si contiene un esatto numero di volte nel numeratore di esso; il quoto, che si ha dividendo il numeratore di

quel fratto per lo denominatore dee pareggiare un certo numero di unità. Vale a dire, che ogni fratto apparente contiene un esatto numero di unità.

§. 55. *Cor. II.* Se dividasi il numeratore di un fratto spurio pel denominatore, si ottiene un certo numero di unità per quoto, ed un residuo. Or di questo residuo dovendosene prendere tal parte, che vien dinotata dal divisore, l'è chiaro, che quel fratto spurio debba pareggiare il detto quoto insieme con un fratto, il cui numeratore è il residuo della divisione, e'l denominatore è quello stesso del fratto proposto. Così p. es. contenendosi il 7 nel 19 due volte col residuo 5; dev'essere $7 \times 2 + 5 = 19$, e'l fratto $\frac{19}{7}$ dee pareggiare $\frac{7 \times 2 + 5}{7}$, ovvero questi due $\frac{14}{7} + \frac{5}{7}$. Ma il fratto apparente $\frac{19}{7}$ è uguale (§. 54)

a 2. Dunque dev'essere pure $\frac{19}{7} = 2 + \frac{5}{7}$.

§. 56. *Cor. III.* E perciò in ogni divisione, che non avvenga esatta, il residuo dovrà scriiversi a destra del quoto sopra una linea, e sotto di questa vi si dovrà scrivere il divisore.

§. 57. *Cor. IV.* E di quì si rileva, I. Che per ridurre un fratto spurio ad intiero e fratto, convien dividere il numeratore di esso pel denominatore; il quoziente dovrà dinotare il numero delle unità, che si contengono in esso fratto, e'l residuo sarà il numeratore di quel fratto, che avendo lo stesso denominatore del proposto dee aggiungersi al medesimo quoziente. II. Che per ridurre un fratto apparente ad un numero intiero, convien dividere il nu-

meratore di esso pel denominatore; il quoto sarà uguale al fratto proposto.

Esempio. Ridurre il fratto spurio $\frac{25}{7}$ ad intero e fratto. Si divida il numeratore 25 del proposto fratto pel denominatore 7 di esso, ed al quoto 3 vi si aggiunga il fratto $\frac{4}{7}$, che abbia per numeratore il residuo 4 di tal divisione, e per denominatore il denominatore 7 del fratto proposto. Sarà $\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$.

PROP. XIII. TEOR.

§. 58. Ogni fratto non cambia di valore, se il numeratore e il denominatore di esso si moltiplichino per uno stesso numero.

Dim. Poichè p. es. la frazione $\frac{3}{7}$ dinota che l'unità è stata divisa in 7 parti uguali (§.47.), di cui se ne son prese 3; l'è chiaro, che se ciascuna di quelle 7 parti si divida in due parti uguali, ognuna di quelle, che ne risultano, dev'essere la metà di ciascuna delle 7 parti, in che fu da prima l'unità divisa. Vale a dire che $\frac{1}{14}$ è la metà di $\frac{1}{7}$. Dunque dev'essere $\frac{2}{14}$ uguale ad $\frac{1}{7}$. Il perchè il triplo di $\frac{1}{7}$ dev'essere pure uguale al triplo di $\frac{2}{14}$. Ma il triplo di $\frac{1}{7}$ è $\frac{3}{7}$, e 'l triplo di $\frac{2}{14}$ è $\frac{6}{14}$. Dunque dev'essere $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$.

E quindi essendo i termini 6 e 14 del secondo fratto i rispettivi prodotti dei termini 3 e 7 del primo fratto per lo stesso numero 2, ne siegue, che il fratto $\frac{3}{7}$ non cambia di valore se i termini di esso si moltiplichino pel numero 2. Nella stessa guisa potrebbe dimostrarsi, che se il numeratore e 'l denominatore di un fratto si moltiplichino per qualunque altro numero, il valore del fratto resta lo stesso. C. B. D.

§. 59. *Cor. I.* E di quì si rileva, che se il numeratore e 'l denominatore di un fratto sieno divisibili esattamente per un medesimo numero; i quozienti, che si ottengono dividendo i termini di esso fratto per quel numero, ne dovranno rispettivamente dinotare il numeratore e 'l denominatore di un altro fratto; che dee pareggiare il proposto, e che è ridotto ad una più semplice espressione.

§. 60. *Cor. II.* Essendo il numero 3 lo stesso che il fratto apparente $\frac{3}{1}$, questo fratto non dovrà mutare il suo valore moltiplicandone il numeratore e 'l denominatore per un qualunque numero, come p. es. per 5. Il perchè dovrà essere $\frac{3}{1}$, ovvero 3 uguale a $\frac{15}{5}$. Vale a dire, che *un qualunque numero intiero si riduce ad un fratto di un dato denominatore moltiplicando esso numero pel detto denominatore, e scrivendo sotto un tal prodotto lo stesso denominatore.*

§. 61. *Def. XIV.* Chiamasi numero primo quello, che non risulta moltiplicando tra loro altri numeri intieri ciascuno maggiore di 1. Tali sono i numeri 2, 5, 7, 11, 13, ec.

§. 62. *Def. XV.* Due numeri si dicono *tra se primi* se essi non hanno altro fattore comune che l'unità. Tali sono i numeri 5 e 9, 7 e 13, 36 e 49, ec.

§. 63. *Cor. I.* Dunque se il numeratore e 'l denominatore di un fratto sieno numeri tra se primi, quel fratto non potrà ridursi ad un altro dello stesso valore e di una più semplice espressione (§. 59.).

§. 64. *Cor. II.* E se il numeratore e 'l denominatore di un fratto non sieno numeri tra se primi, per ridurre quel fratto ad un altro dello stesso valore, ma della più semplice espressione, converrà dividere il numeratore e 'l denominatore di esso pel loro massimo fattore comune. Così per es. essendo 2, 4 ed 8 i fattori comuni dei numeri 24 e 560, il fratto $\frac{24}{560}$ potrà ridursi alla più semplice espressione, se dividasì il numeratore e 'l denominatore di esso pel numero 8, che è il massimo tra quei fattori comuni.

§. 65. *Def. XVI.* La *riduzione di un fratto a minimi termini* consiste nell' esibirne un altro dello stesso valore di esso, e di cui il numeratore e 'l denominatore sieno numeri tra se primi (§. 63.).

§. 66. *Def. XVII.* La *massima comune misura* di due numeri è il loro massimo comune fattore.

§. 67. *Cor. I.* Dunque affinchè un fratto possa ridursi a minimi termini (§. 65.), l'è mestieri determinare la massima comune misura dei termini di esso.

§. 68. *Cor. II.* La massima comune misura

di due numeri dev' essere il minore di essi numeri, se questo si contenga esattamente nel maggiore.

PROP. XIV. PROBL.

§. 69. *Dati due numeri, determinare la loro massima comune misura.*

Sol. I. Si divida il maggiore di quei numeri pel minore, e se da questa divisione non si ottenga alcun residuo, il minore dei numeri dati dovrà dinotare la massima comune misura tra esso e l' maggiore (§. 68.).

II. Che se poi dalla detta divisione si ottenga un residuo, si divida il minore dei numeri dati per questo residuo, il quale sarà la massima comune misura, che si domanda, se in questa divisione non vi sia residuo.

III. In oltre se nella seconda divisione si ottenga un residuo, si divida il residuo della prima divisione per quello della seconda: e se da questa divisione non si ottenga alcun residuo, il residuo della seconda divisione sarà la massima comune misura, che cercasi. Altrimenti dovrà dividersi il residuo della penultima divisione per quello dell' ultima, e nello stesso modo dovrà procedersi in seguito finchè si pervenga ad un residuo, il quale divida esattamente quello della penultima divisione.

Sarà l' ultimo residuo il massimo comune fattore tra i numeri dati: e questi saranno tra se primi, se quell' ultimo residuo sia 1.

Esempio. Determinare il massimo comune divisore dei numeri 438 e 102.

<i>Quoto della seconda divisione.</i>	438	102	4	<i>Quoto della prima divis.</i>
3	408	90	4	
<i>Quoto della quarta divisione</i>	30	12	2	<i>Quoto della terza divis.</i>
2	24			
	6			

Dividasi il maggiore dei numeri dati 438 pel minore 102. Si avrà 4 per quoto, e 30 per residuo. Di poi si divida il minore di essi numeri 102 pel residuo 30. Si otterrà 3 per quoto e 12 per residuo. In oltre si divida il primo residuo 30 pel secondo 12. Dovrà risultarne 2 per quoto e 6 per residuo. Finalmente il penultimo residuo 12 si divida per l'ultimo 6. Si otterrà 2 per quoto, e zero per residuo. Sarà 6 il massimo comune fattore dei numeri 438 e 102.

Dim. Poichè il numero 438 contiene 4 volte l'altro 102 rimanendovi 30, dev'essere

$$438 = 102 + 102 + 102 + 102 + 30,$$

e'l quoto, che si ottiene dividendo 438 per la massima comune misura domandata, dee pareggiare il quoziente di 102 per la massima comune misura preso quattro volte, aggiuntovi il quoto di 30 per lo stesso massimo comun fattore. Ma il quoto di 438 per la massima comune misura domandata è un numero intiero senza residuo, e'l quoto di 102 per la stessa massima comune misura è pure un numero intiero. Dunque dev'essere anche il quoto di 30 per la massima comune misura un numero intiero; poichè se tal quoto fosse un fratto vero o spurio, ne seguirebbe, che il numero intiero ottenuto dividendo 438 per lo massimo comun fattore dovrebbe pareggiare quel numero intiero, che è qua-

druplo del quoto di 102 per la massima comune misura, insieme collo stesso fratto; il che ripugna. Il perchè quella massima comune misura dev'essere la stessa, che l'altra dei numeri 102 e 30. Ma dividendo 102 per 30 si ottiene 3 per quoto e 12 per residuo. Dunque il numero 102 è lo stesso di $30+30+30+12$. Onde collo stesso ragionamento di poc' anzi si potrà rilevare, che la massima comune misura dei numeri 102 e 30 sia la stessa, che l'altra dei numeri 30 e 12. Ma il 12 si contiene in 30 due volte col residuo 6. Dunque la massima comune misura tra 30 e 12 dev'essere quella stessa dei numeri 6 e 12. E quindi contenendosi il 6 nel 12 due volte senza residuo, sarà 6 la massima comune misura tra 12 e 30, o tra 30 e 102, o finalmente tra 102 e 438, che sono i numeri dati. C. B. F.

§. 70. *Cor.* Il perchè se debbasi ridurre a minimi termini il fratto $\frac{102}{438}$, convien prima determinare la massima comune misura 6 tra i termini 102 e 438 di esso, e poi dividere quei termini per questa massima comune misura: onde ne dovrà risultare $\frac{102}{438} = \frac{17}{73}$.

§. 71. *Def. XVIII.* La riduzione di più fratti al medesimo denominatore consiste nell'esibirne altrettanti, che sieno rispettivamente uguali ai proposti, ed abbiano un medesimo denominatore.

PROP. XV. PROBL.

§. 72. *Date più frazioni, ridurle allo stesso denominatore.*

Sol. Si moltiplichì il numeratore e'l denominatore di ciascun fratto pel prodotto dei denominatori di tutti gli altri. Le frazioni, che ne risultano, saranno quelle, che si domandano.

Dim. Poichè il denominatore di una qualunque delle frazioni ottenute essendo il prodotto di tutti i denominatori delle frazioni proposte, sarà lo stesso in ciascuna di esse. Ma il numeratore e'l denominatore di ciascuna delle frazioni proposte si sono moltiplicati pel prodotto dei denominatori di tutte le altre frazioni. Dunque i fratti, che con tale operazione si ottengono, devono essere rispettivamente uguali ai dati (§. 58). C. B. F.

Esempio. Sieno le frazioni $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{9}$, che

si vogliano ridurre allo stesso denominatore. Si moltiplichì il denominatore 7 del primo fratto pel denominatore 5 del secondo, e'l prodotto 35 si moltiplichì per 9 denominatore del terzo fratto. Di poi il prodotto 315 di 35 per 9 si scriva sotto ciascuna di tre linee orizzontali; poichè esso deve dinotarne il comune denominatore dei fratti ridotti. In oltre, essendosi moltiplicato il denominatore 7 del primo fratto pel prodotto dei denominatori 5 e 9 degli altri due, o sia per 45, converrà moltiplicare anche per 45 il numeratore 3 del primo fratto: essendosi moltiplicato il denominatore 5 del secondo fratto pel prodotto 63 dei denominatori 7 e 9 degli

altri due, converrà moltiplicare anche per 63 il numeratore 4 di esso: ed essendosi moltiplicato il denominatore 9 del terzo fratto pel prodotto 35 degli altri due denominatori, converrà moltiplicare eziandio per 35 il numeratore 5 del terzo fratto. Ma il prodotto di 45 per 3 pareggia 135, il prodotto di 4 per 63 adegua 252, e'l prodotto di 5 per 35 è uguale a 175. Dun-

que le tre frazioni $\frac{135}{315}$, $\frac{252}{315}$, e $\frac{175}{315}$

devono essere rispettivamente uguali ai fratti proposti.

§. 73. *Cor. I.* Qualora il denominatore di uno dei fratti proposti divida esattamente il denominatore di un altro fratto, si può semplificare la riduzione di essi allo stesso denominatore. In fatti suppongasi p. es., che si vogliano ridurre allo stesso denominatore le tre frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{12}$, di cui il denominatore 3 della prima si

contiene 4 volte nel denominatore 12 della terza senza residuo. Dovrà essere $12 = 4 \cdot 3$. Onde se col metodo precedente (§. 72.) si volessero ridurre le proposte frazioni allo stesso denominatore; il denominatore comune delle frazioni ridotte sarebbe $3 \cdot 5 \cdot 12$, ovvero $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4$, il numeratore del primo fratto sarebbe $2 \cdot 5 \cdot 12$, ovvero $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4$, il numeratore del secondo sarebbe $4 \cdot 3 \cdot 12$, ovvero $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4$, e'l numeratore del terzo fratto sarebbe $5 \cdot 3 \cdot 5$. Vale a dire che i fratti ridotti ne verrebbero indicati dai seguenti:

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4}, \frac{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ e } \frac{5 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4}$$

in ciascuno dei quali evvi tanto nel numeratore, che nel denominatore il fattore 3. Il perchè se tolgaſi dai termini di queſte frazioni (§. 58.) il comune fattore 3, dovranno emergerne le ſequenti

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 4}, \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 4}, \text{ e } \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 4},$$

ovvero le altre

$$\frac{40}{60}, \frac{48}{60}, \text{ e } \frac{25}{60},$$

che devono eſſere reſpettivamente uguali alle propoſte.

§. 74. *Cor. III.* Allora che due o più fratti ſono ridotti allo ſteſſo denominatore ſi può coſciere quali di eſſi ſia il maggiore. Di fatti prima di ridurre p. eſ. i fratti $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{9}$ allo ſteſſo denominatore, non ſi può aſſerire quale di eſſi ne ſia il maggiore; poichè il primo dinota 3 parti (§. 47.) dell' unità diviſa in 7 parti uguali, e 'l ſecondo rappresenta 5 delle 9 parti uguali in che ſi è diviſa un' altra ſimile unità, onde una delle prime parti deve differire da una delle ſeconde. Ma riducendo quei fratti allo ſteſſo denominatore ſi trova, che il primo è uguale a $\frac{27}{63}$, e 'l ſecondo a $\frac{35}{63}$. Dunque il ſecondo fratto è maggiore del primo.

PROP. XVI. PROBL.

§. 75. *Date più frazioni, prenderne la loro ſomma.*

Sol. Caſ. I. Se le propoſte frazioni abbiano un denominatore comune, la ſomma di eſſe

sarà uguale a quel fratto, il cui numeratore pareggia la somma dei numeratori dei fratti proposti, e 'l denominatore 'è quello stesso di questi fratti.

Cas. II. Che se poi le proposte frazioni abbiano diversi denominatori, converrà prima ridurle allo stesso denominatore, e poi di queste prenderne la somma come nel Cas. I.

Esempio. Si voglia la somma delle frazioni

$$\frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \text{ e } \frac{5}{9}.$$

Le proposte frazioni si riducano alle altre $\frac{135}{315}$, $\frac{252}{315}$, e $\frac{175}{315}$, che hanno 315 per comune denominatore (§. 72.). Di poi si prenda la somma 562 dei numeratori 135, 252, e 175 dei fratti ridotti. Sarà la somma delle frazioni proposte, cioè $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9}$ uguale al fratto $\frac{562}{315}$.

Dim. Poichè i fratti proposti $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{8}$, e $\frac{5}{9}$ sono rispettivamente uguali agli altri $\frac{135}{315}$, $\frac{252}{315}$, e $\frac{175}{315}$ (§. 72.), sarà la somma di questi uguale alla somma di quelli. Ma ogni unità del numeratore di ciascuno di questi tre secondi fratti ne dinota la trecento-quindicesima parte di 1. Dunque la somma dei fratti $\frac{135}{315}$, $\frac{252}{315}$, e $\frac{175}{315}$ deve pareggiare la trecento-quindicesima parte dell'unità presa tante volte, quante sono le unità, che si contengono nella somma dei tre numeri 135, 252, e 175, o sia nel numero 562. E perciò dev' essere $\frac{562}{315}$ la somma delle tre fra-

zioni $\frac{135}{315}$, $\frac{252}{315}$, e $\frac{178}{315}$ ovvero delle altre tre
 $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{8}{9}$. C. B. F.

§. 76. *Cor. I.* Qualora la somma di più frazioni risulta uguale ad un fratto spurio, si può questo ridurre ad intiero e fratto (§. 57.). Così p. es. essendo il fratto spurio $\frac{562}{315}$ uguale alla

somma dei tre fratti $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{8}{9}$, se dividasi il numeratore 562 di quel fratto spurio pel denominatore 315 di esso, il quoto 1 di tal divisione aggiunto al residuo 247 diviso per 315 sarà uguale a $\frac{3}{7} + \frac{4}{5} + \frac{8}{9}$; cioè dovrà essere

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{5} + \frac{8}{9} = 1 + \frac{247}{315}.$$

§. 77. *Cor. II.* In oltre, se debbano sommarsi numeri intieri uniti a frazioni, converrà prima prendere la somma delle frazioni, e poi prendere la somma degl' intieri. E se la somma delle frazioni risulti uguale ad un fratto apparente o spurio, sarà mestieri togliere da questo fratto (§. 55.) le unità, che vi si contengono, ed aggiungerle alla somma dei numeri intieri dati. Questa somma insieme col numero intiero, che ne risulta, sarà la somma degl' intieri e dei fratti proposti.

PROP. XVII. PROBL.

§. 78. *Dati due fratti disuguali, sottrarre il minore di essi dal maggiore.*

Sol. Cas. I. Se i fratti dati abbiano lo stesso denominatore, la loro differenza dovrà pareggiare un fratto, il cui numeratore sarà uguale al numeratore del diminuendo tolto l'altro del sottrattore, e l' denominatore sarà quello, che è comune alle frazioni date.

Cas. II. Che se le frazioni proposte abbiano diversi denominatori, converrà ridurle allo stesso denominatore, e poi prendere di queste la differenza come nel Caso I.

Esempio. Si voglia sottrarre dal fratto $\frac{7}{9}$ l' altro $\frac{3}{5}$.

I fratti proposti ridotti allo stesso denominatore sono rispettivamente (§. 72.) uguali a $\frac{35}{45}$ e $\frac{27}{45}$, di cui la differenza dei numeratori 35 e 27 è 8. Dunque la differenza dei fratti $\frac{35}{45}$ e $\frac{27}{45}$, ovvero degli altri $\frac{7}{9}$ e $\frac{3}{5}$ dee pareggiare $\frac{8}{45}$.

Dim. Poichè i fratti proposti $\frac{7}{9}$ e $\frac{3}{5}$ sono rispettivamente uguali agli altri due $\frac{35}{45}$ e $\frac{27}{45}$, sarà la differenza di questi uguale alla differenza di quelli. Ma ogni unità del numeratore di ciascuno di questi secondi fratti ne dinota la 45.^{ma} parte di 1. Dunque la differenza dei fratti $\frac{35}{45}$ e $\frac{27}{45}$ deve pareggiare la quarantacinquesima parte della differenza

tra 27 e 35 , cioè $\frac{8}{45}$. E quindi dev' essere anche

$$\frac{7}{9} - \frac{13}{8} = \frac{8}{45} \dots \text{C. B. F.}$$

§. 79. *Cor. I.* Se da un numero intiero se ne debba togliere un fratto , converrà ridurre una unità dell' intiero a fratto dello stesso denominatore del proposto (§. 60.) , e poi il sottrattore dato si dovrà togliere da quell' unità ridotta a fratto. Il residuo , che si otterrà , aggiunto al numero intiero dato diminuito di 1 , dovrà essere il residuo della sottrazione proposta. Così p. es.

dovendosi sottrarre dal numero 5 il fratto $\frac{2}{7}$, dovrà ridursi una unità del 5 al fratto $\frac{7}{7}$, che ha per denominatore il numero 7 denominatore di $\frac{2}{7}$. E quindi essendo $5 = 4 + \frac{7}{7}$, la differenza tra 5 e $\frac{2}{7}$ dev' essere la stessa di quella , che si ha sottraendo $\frac{2}{7}$ da $4 + \frac{7}{7}$, cioè dev' essere $5 - \frac{2}{7} = 4 + \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = 4 + \frac{5}{7}$.

§. 80. *Cor. II.* Che se da un numero intiero unito ad una frazione se ne debba togliere un altro intiero con una frazione , sarà mestieri ridurre le due frazioni ad un medesimo denominatore. Di poi queste nuove frazioni si dovranno aggiungere a quei numeri intieri , e se la frazione , che trovasi nel sottrattore , sia minore o uguale a quella , che trovasi nel diminuendo , si dovrà sottrarre il fratto dal fratto , e l' in-

tiero dall' intero. Ma se la frazione, che trovasi nel sottrattore sia maggiore di quella del diminuendo, converrà ridurre una unità di questo ad un fratto dello stesso denominatore dell' altro, che sta unito al numero intero del diminuendo medesimo. Di poi dal numero, che resta nel diminuendo, e dal fratto, che vi era, insieme coll' altro, che è uguale all' unità, si dovrà togliere il sottrattore.

Esempio I. Sottrarre $3\frac{2}{5}$ da $8\frac{6}{15}$.

I fratti $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{15}$ sono uguali tra loro: poichè moltiplicando il numeratore e 'l denominatore del primo per 3 si ha il secondo. E quindi sarà lo stesso sottrarre $3\frac{2}{5}$ da $8\frac{6}{15}$, che $3\frac{2}{5}$ da $8\frac{2}{5}$. Ma $8\frac{2}{5}$ diminuito di $3\frac{2}{5}$ adegua 5. Dunque dev' essere

$$8\frac{6}{15} - 3\frac{2}{5} = 5.$$

Esempio II. Sottrarre da $7\frac{2}{5}$ l'intero e fratto $3\frac{4}{7}$.

Riducendo i fratti $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{7}$ allo stesso denominatore si ha $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$, e $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$. Il perchè sarà lo stesso sottrarre $3\frac{4}{7}$ da $7\frac{2}{5}$, che $3\frac{20}{35}$ da $7\frac{14}{35}$. Ma per esserne $\frac{20}{35}$ maggiore di $\frac{14}{35}$, non si potrà sottrarre

$\frac{20}{35}$ da $\frac{14}{35}$ e 3 da 7. Onde è mestieri ridurre una unità del 7 ad un fratto, che abbia 35 per denominatore. E quindi il diminuendo proposto sarà lo stesso che $6 + \frac{35}{35} + \frac{14}{35}$, o sia sarà lo stesso che $6 + \frac{49}{35}$. Dunque il residuo, che si domanda, dovrà pareggiare $6 + \frac{49}{35} - 3 - \frac{20}{35}$. Ma $6 - 3$ adegua 3, e $\frac{49}{35} - \frac{20}{35}$ è eguale a $\frac{29}{35}$. Dunque dev' essere $6 + \frac{49}{35} - 3 - \frac{20}{35}$, o sia $7 - \frac{2}{5} - 3 + \frac{4}{7} = 3 - \frac{29}{35}$.

PROP. XVIII. PROBL.

§. 81. *Dati due fratti, moltiplicare l'uno di essi per l'altro.*

Sol. Si moltiplichino il numeratore di uno dei fratti dati pel numeratore dell'altro, e'l denominatore del primo si moltiplichino pel denominatore del secondo. Il prodotto dei fratti proposti sarà un altro fratto, che avrà per numeratore il primo prodotto, e per denominatore il secondo.

Esempio. Sieno dati i due fratti $\frac{4}{7}$ e $\frac{3}{5}$; fa d'uopo moltiplicare il primo di essi pel secondo.

Si moltiplichino tra loro non solo i numeratori 4 e 3 di quei fratti, ma eziandio i denominatori 7 e 5 di essi. Il fratto $\frac{12}{35}$ che ha per numeratore il primo prodotto 12, e per denominatore il secondo 35, dovrà essere il prodotto di $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$.

Dim. Poichè moltiplicando tanto il numeratore che il denominatore del fratto $\frac{4}{7}$ pel denominatore 5 del secondo, esso non cambia (§. 58) di valore, e'l numeratore 20 del fratto $\frac{20}{35}$, che ne risulta, diviso per 5 dà 4 per quoto senza residuo. Dunque la quinta parte di $\frac{20}{35}$, ovvero di $\frac{4}{7}$ dev'essere $\frac{4}{35}$. Il perchè il triplo della quinta parte di $\frac{4}{7}$ deve pareggiare il triplo di $\frac{4}{35}$, ovvero $\frac{12}{35}$. E perciò $\frac{12}{35}$ dev' essere il prodotto di $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$.

§. 82. *Cor. I.* E di quì si rileva, che dovendosi moltiplicare il fratto $\frac{4}{35}$ pel numero intero 3, convien moltiplicare il numeratore 4 di quello per questo numero intero, e'l fratto $\frac{12}{35}$, che ha per numeratore quel prodotto, e per denominatore il denominatore del fratto proposto, dev' essere il prodotto cercato. Vale a dire, che *il prodotto di un numero intero per un fratto pareggia un altro fratto, il cui numeratore è il prodotto del numero intero pel numeratore del fratto dato, e'l denominatore è quello di esso fratto.*

§. 83. *Cor. II.* Se debbasi moltiplicare un numero intero per un fratto, che abbia per denominatore esso numero intero, il prodotto dovrà pareggiare il numeratore di quel fratto. In fatti

dovendosi moltiplicare il numero intero 7 pel fratto $\frac{5}{7}$, il prodotto dovrà pareggiare $\frac{35}{7}$, che è uguale al numeratore 5 del fratto $\frac{5}{7}$ (§. 57.).

§. 84. *Cor. III.* E se debbansi moltiplicare due fratti, di cui il primo abbia per denominatore quel numero, che è numeratore del secondo; il prodotto di essi sarà un fratto, che avrà per numeratore quello del primo fratto, e per denominatore il denominatore del secondo.

Così p. es. dovendosi moltiplicare il fratto $\frac{5}{7}$ per

l'altro $\frac{7}{9}$, il prodotto sarà il fratto $\frac{35}{63}$, di cui il numeratore e l. denominatore hanno per fattore comune il numero 7. Onde esso ridotto a minimi termini si convertirà nell'altro $\frac{5}{9}$, di cui il numeratore è quello del fratto $\frac{5}{7}$, e l. denominatore adegua il denominatore di $\frac{7}{9}$.

§. 85. *Cor. IV.* E poichè $2 \frac{3}{5}$ pareggia $\frac{13}{5}$, e $4\frac{5}{7}$ è uguale (§. 60) a $\frac{33}{7}$; dev' essere il prodotto di $2\frac{3}{5}$ per $4\frac{5}{7}$ uguale a quello di $\frac{13}{5}$ per $\frac{33}{7}$. Ma il prodotto (§. 81.) di $\frac{13}{5}$ per $\frac{33}{7}$ pareggia il fratto $\frac{429}{35}$. Dunque se debbasi moltiplicare un numero intero unito ad una frazione

per un numero intero ancora unito ad un fratto, sarà mestieri ridurre ciascuno intero col suo fratto ad un sol fratto (§. 60.), e di poi moltiplicare tra loro le due frazioni, che ne risultano.

PROP. XIX. PROBL.

§. 86. *Dati due fratti, dividere l'uno di essi per l'altro.*

Sol. Si moltiplichino il numeratore del fratto dividendo pel denominatore del fratto divisore, e l' denominatore del primo fratto pel numeratore del secondo. Il quoziente, che si domanda, dev'essere quel fratto, che ha per numeratore il primo prodotto, e per denominatore il secondo.

Esempio. Sieno date le frazioni $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{7}$; fa d'uopo dividere $\frac{5}{8}$ per $\frac{3}{7}$.

Si moltiplichino il numeratore 5 del dividendo $\frac{5}{8}$ pel denominatore 7 del divisore $\frac{3}{7}$, e l' denominatore 8 del primo fratto pel numeratore 3 del secondo. Il fratto $\frac{35}{24}$, che ha per numeratore il primo prodotto 35, e per denominatore il secondo prodotto 24, dev'essere il quoto di $\frac{5}{8}$ per $\frac{3}{7}$.

Dim. Poichè se il fratto $\frac{35}{24}$, ovvero l'altro $\frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 3}$ non fosse il quoto di $\frac{5}{8}$ per $\frac{3}{7}$, il prodotto di esso pel divisore $\frac{3}{7}$ non dovrebbe pareggiare il

dividendo. Ma il prodotto di $\frac{5.7}{8.3}$ per $\frac{3}{7}$ adegua $\frac{5.7.3}{8.3.7}$ ovvero $\frac{5}{8}$ (§. 64.), che è il dividendo dato. Dunque il fratto $\frac{5.7}{8.3}$, ovvero l'altro $\frac{33}{24}$ dev'essere il quoto di $\frac{5}{8}$ per $\frac{3}{7}$. C. B. F.

§. 87. *Cor. I.* Dunque se il numeratore del fratto dividendo adegui quello del fratto divisore; il quoto dovrà essere quel fratto, che avrà per numeratore il denominatore del divisore e per denominatore il denominatore del fratto dividendo. E se il denominatore del fratto dividendo adegui il denominatore del fratto divisore; il quoto sarà quell'altro fratto, che avrà per numeratore il numeratore del fratto dividendo e per denominatore il numeratore del fratto divisore (§. 84.).

§. 88. *Cor. II.* Se vogliasi dividere un numero intero per un fratto, o pure un fratto per un intero, conviene esibire l'intero per un fratto, che abbia esso intero per numeratore e l'unità per denominatore. Così per esempio volendo dividere il numero intero 2 pel fratto $\frac{5}{7}$, bisognerà scrivere $\frac{2}{1} : \frac{5}{7}$, e'l quoto sarà il fratto $\frac{14}{5}$, che ha per numeratore il prodotto dell'intero pel denominatore del fratto, e per denominatore il numeratore del fratto. E se vogliasi dividere $\frac{5}{7}$ per 2, ovvero $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{1}$; il quoto sarà il fratto $\frac{5}{14}$, che ha per numeratore il numera-

tore del fratto e per denominatore il prodotto del numero intero pel denominatore del fratto.

§. 89. *Cor. III.* E poichè $2 \frac{3}{5}$ pareggia $\frac{13}{5}$, e $5 \frac{7}{9}$ è uguale a $\frac{52}{9}$; il quoto di $2 \frac{3}{5}$ per $5 \frac{7}{9}$ dee pareggiare $\frac{117}{260}$, che si ottiene dividendo $\frac{13}{5}$ per $\frac{52}{9}$. Vale a dire, che se vogliasi dividere un numero intero unito ad una frazione per un numero intero unito anche ad un fratto, converrà ridurre ciascun numero intero col suo fratto ad una sola frazione (§. 60.), e poi dividere la prima, che ne risulta, per la seconda (§. 86.)

§. 90. *Def. XIX.* Se una frazione si divida in parti tra se uguali, e di queste se ne prenda un numero qualunque, l'espressione che dinota il numero delle parti già prese della frazione, dicesi *fratto di fratto*.

§. 91. *Scol.* Suppongasi, che la frazione $\frac{5}{7}$ si divida in 9 parti uguali, delle quali se ne prendano 4; l'espressione, che dinota queste 4 parti è quella, che dicesi frazione di frazione, ed essa dovrà scriversi in questa guisa $\frac{4 \frac{5}{9}}{9}$, che si pronuncia *quattro noni di cinque settimi*.

§. 92. *Def. XX.* Se una frazione di frazione si divida in parti tra se uguali, e di queste se ne prenda un qualunque numero, l'espressione, che dinoterà il numero di dette parti, chiamasi *frazione di frazione di frazione*. Tal'è p. e.

$\frac{4}{9} \left| \frac{3}{7} \right| \frac{2}{3}$, che si pronuncia $\frac{4}{9}$ di $\frac{3}{7}$ di $\frac{2}{3}$. Nella stessa guisa potrebbe formarsi la definizione del *fratto di fratto di fratto di fratto*, ec.

PROP. XX. PROBL.

§. 93. *Data una frazione di frazione , ridurla a fratto semplice.*

Sol. Sia data la frazione di frazione $\frac{3}{7} \left| \frac{4}{5} \right.$, bisogna ridurla a fratto semplice.

Si moltiplichino tra loro i numeratori ed i denominatori delle frazioni $\frac{3}{7}$ e $\frac{4}{5}$. Il fratto $\frac{12}{35}$, che ha per numeratore il prodotto dei numeratori, e per denominatore il prodotto dei denominatori di quelle frazioni, sarà uguale a $\frac{3}{7} \left| \frac{4}{5} \right.$.

Dim. Poichè $\frac{4}{5}$ è uguale a $\frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7}$, ovvero a $\frac{4 \cdot 7}{35}$, dev' essere la settima parte di $\frac{4}{5}$ uguale alla settima parte di $\frac{4 \cdot 7}{35}$, ovvero a $\frac{4}{35}$. Dunque il triplo della settima parte di $\frac{4}{5}$ dee pareggiare il triplo di $\frac{4}{35}$. Ma il triplo di $\frac{4}{35}$ è uguale a $\frac{12}{35}$. Dunque dev' essere $\frac{3}{7} \left| \frac{4}{5} \right. = \frac{12}{35}$. C.B.F.

§. 94. *Cor.* E poichè $\frac{3}{7} \left| \frac{4}{5} \right.$ è uguale a $\frac{12}{35}$, dev' essere $\frac{3}{7} \left| \frac{4}{5} \right| \frac{2}{11} = \frac{12}{35} \left| \frac{2}{11} \right.$. Ma $\frac{12}{35} \left| \frac{2}{11} \right.$ adegua (§. 93.)

il fratto semplice $\frac{24}{385}$. Dunque dev'essere $\frac{8}{7} \left| \frac{4}{5} \right| \frac{2}{11}$
 $= \frac{24}{385}$. Nello stesso modo si potrebbero ridurre
 a semplici fratti le frazioni di frazioni di fra-
 zioni di frazioni, ec.

C A P. IV.

DEL CALCOLO DEI FRATTI DECIMALI.

§. 95. *Def. XXI. Fratti decimali* si dicono quelli, i cui denominatori scrivonsi coll'unità, ed uno o più zeri verso la destra. Tali sono i fratti $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10000}$, $\frac{7}{1000000}$, ec.

§. 96. *Cor. I.* Dunque i fratti decimali di diversi denominatori si possono facilmente ridurre allo stesso denominatore; poichè il denominatore di uno di essi è sempre uno dei fattori del denominatore dell'altro (§. 73.). Così p. es. il denominatore 10 del fratto $\frac{3}{10}$ è fattore del denominatore 10000 dell'altro fratto $\frac{5}{10000}$. Il perchè essendo 1000 il quoto, che risulta dividendo 10000 per 10, se moltiplicasi per 1000 tanto il numeratore che il denominatore del fratto $\frac{3}{10}$, ne dovrà risultare l'altro $\frac{3000}{10000}$, che ha lo stesso denominatore del fratto $\frac{5}{10000}$.

§. 97. *Cor. II.* E poichè il numero 30574 pareggia 30000+500+70+4; la somma dei fratti

decimali $\frac{30000}{10000}$, $\frac{500}{10000}$, $\frac{70}{10000}$, e $\frac{4}{10000}$ dee pareg-
 giare il (§. 75.) fratto $\frac{30574}{10000}$. Ma il fratto
 $\frac{30000}{10000}$ adegua (§. 53.) il numero intero 3 ,
 il fratto $\frac{5000}{100000}$ è uguale (§. 59) a $\frac{5}{100}$, e
 l'altro $\frac{70}{10000}$ pareggia $\frac{7}{1000}$. Dunque il fratto de-
 cimale $\frac{30574}{10000}$ è la somma di 3 unità, di 5 cen-
 tesime, di 7 millesime, e di 4 diecimillesime;
 ovvero il fratto decimale $\frac{30574}{10000}$ è la somma di
 3 unità, di zero decime, di 5 centesime, di
 7 millesime, e di 4 diecimillesime: ed il fratto
 $\frac{574}{10000}$ è la somma di 5 centesime, di 7 mille-
 sime, e di 4 diecimillesime; ovvero il fratto
 $\frac{574}{10000}$ è la somma di zero unità, di zero decime,
 di 5 centesime, di 7 millesime, e di 4 dieci-
 millesime. Vale a dire, che *se dalla destra
 verso la sinistra del numeratore di un fratto
 decimale si separino con una virgola tante
 cifre quanti sono gli zeri del denominatore
 dello stesso fratto, e se non bastino si sup-
 pliscano le cifre mancanti verso la sinistra con
 gli zeri, e poi avanti all'ultima cifra verso
 la stessa parte si ponga una virgola; la pri-
 ma cifra a destra dopo la virgola dinoterà le
 parti decime, la seconda dopo la virgola di-
 noterà le parti centesime, la terza le parti
 millesime, e così in appresso: quelle cifre*

poi, che talvolta si trovano avanti la virgola, dovranno dinotare numeri intieri.

§. 98. *Cor. III.* E per tal ragione i fratti decimali si sogliono dinotare coi soli numeratori, avvertendo di scrivere prima un zero, se non vi sieno numeri intieri, poi una virgola, in seguito le parti decime, di poi le centesime, indi le millesime, e così in appresso: e se manchino alcune di queste parti, la loro mancanza si supplisca con gli zeri. Così p. es. per dinotare il

fratto decimale $\frac{30574}{10000}$, che è (§. 97) la somma di 3 unità, di 5 centesime, di 7 millesime, e di 4 diecimillesime, si separino mediante una virgola dal numeratore 30574 di esso, e dalla destra verso la sinistra, quattro cifre, quanti sono gli zeri del denominatore 10000, e dopo la quarta cifra verso la sinistra si scriva una virgola: onde quel fratto verrà dinotato da 3,0574. Ed essendo tre le cifre del numeratore del fratto decimale $\frac{574}{10000}$, il cui denominatore contiene quattro zeri, dovrà porsi avanti al 5 un zero, ed avanti a questo una virgola, e poi un zero: e quindi quel fratto verrà dinotato da 0,0574.

§. 99. *Cor. IV.* E poichè ogni fratto non cangia di valore se moltiplicansi per uno stesso numero il numeratore e 'l denominatore di esso

(§. 58.), dev'essere il fratto decimale $\frac{30574}{10000}$ uguale a ciascuno dei seguenti fratti

$$\frac{305740}{100000}, \frac{3057400}{1000000}, \frac{30574000}{10000000}, \text{ ec. ,}$$

il primo dei quali si ottiene moltiplicando il numeratore e 'l denominatore del fratto $\frac{30574}{10000}$ per

10 , il secondo per 100 , il terzo per 1000 , ec.

Ma il fratto decimale $\frac{308740}{100000}$ è lo stesso che

3,05740 , il secondo (§. 98.) $\frac{3087400}{1000000}$ è lo stesso di 3,057400 , ec. Dunque *un numero decimale non cangia di valore se a destra di esso si ponga uno , o più zeri.*

PROP. XXI. PROBL.

§. 100. *Dati più fratti decimali omogenei, sommarli insieme.*

Sol. Se i fratti proposti non contengano lo stesso numero di cifre decimali , essi vi si potranno ridurre (§. 99.) ponendo gli zeri a destra di alcuna di quelle cifre decimali : ed in tal modo quei fratti si saranno ridotti allo stesso denominatore. Il perchè la somma degli stessi fratti dee pareggiare un altro fratto , che ha per numeratore la somma dei numeratori dei fratti ridotti , e per denominatore il denominatore comune di questi (§. 75.).

Esempio. Sieno dati i fratti decimali omogenei 5,078,9257432081, 0,008572046, 15,73427,278,5423 ; fa d'uopo prenderne la loro somma.

E poichè il secondo dei fratti proposti contiene più cifre decimali di ciascuno degli altri , si riducano questi allo stesso numero di cifre decimali del secondo fratto per mezzo degli zeri , che a destra di essi si pongano (§. 99.). Quindi i fratti decimali dati si esibiscano nel modo seguente 5,0700000000, 8,9257432081, 0,0085720460, 15,7342700000, 278,5423000000 , che devono avere gli stessi valori di quelli rispettivamente,

e 10000000000 per comune denominatore. Dunque la somma dei fratti decimali dati dee pareggiare quel fratto decimale, che ha per numeratore la somma 3082808852541, e per denominatore 10000000000. Vale a dire, che la somma dei fratti decimali dati è uguale a 308,2808852541.

$$\begin{array}{r}
 5,0700000000 \\
 8,9257432081 \\
 0,0085720460 \\
 15,7342700000 \\
 278,5423000000 \\
 \hline
 308,2808852541
 \end{array}$$

§. 101. *Cor.* E poichè nella somma dei fratti decimali proposti nell'esempio precedente le parti decime corrispondono sulle decime, le centesime sulle centesime, e così appresso: laddove trascurando quei zeri posti a destra di taluni di essi non viene ad alterarsi la detta somma; l'è chiaro che per sommare più fratti decimali, convien disporli in modo che le decime corrispondano sulle decime, le centesime sulle centesime, e così in appresso: di poi si dee prendere la somma come se le cifre mancanti in alcuni di essi fossero altrettanti zeri.

PROP. XXII. PROBL.

§. 102. *Dati due fratti decimali omogenei, sottrarre il minore di essi dal maggiore.*

Sol. Se i fratti proposti non contengano lo stesso numero di cifre decimali, vi si riducano per mezzo degli zeri, che si pongano a destra

di uno di essi (§. 99.): ed in tal modo quei fratti si saranno ridotti allo stesso denominatore. Il perchè (§. 78.) la differenza di essi dee pareggiare un altro fratto decimale, che ha per numeratore la differenza dei numeratori dei fratti ridotti, e per denominatore il comune denominatore degli stessi.

Esempio I. Sieno dati i due fratti decimali 7,523 e 0,834527; fa d'uopo sottrarre il minore di essi 0,834527 dal maggiore 7,523.

E poichè il secondo dei fratti dati contiene sei cifre decimali, e 'l primo ne ha tre, se pongansi tre zeri a destra della terza cifra decimale del primo dei fratti dati, esso non cangerà di valore, e 'l fratto decimale 7,523000, che ne risulta, dovrà avere lo stesso denominatore 1000000 del secondo. Il perchè la differenza dei fratti decimali proposti dee pareggiare quel fratto decimale, che ha per numeratore la differenza 6688473 dei numeratori di essi, e 1000000 per denominatore. Dunque quella differenza dev' essere uguale a 6,688473, come quaggiù vedesi espresso

<i>Diminuendo</i>	7,523000
<i>Sottrattore</i>	0,834527
<i>Residuo</i>	6,688473

Esempio II. Sottrarre da 5,0085429 il fratto decimale 0,5274.

I fratti dati si dispongano in modo che le decime corrispondano sulle decime, le centesime sulle centesime, e così in appresso, e le cifre decimali mancanti nel secondo di quei fratti si suppliscano con gli zeri. Di poi si esegua la sottrazione come se quei numeri fossero intieri,

e dal residuo si separino con una virgola dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, quante sono le cifre decimali di ciascuno dei fratti ridotti: e se nel residuo vi fosse minor numero di cifre decimali di quelle del diminuendo e del sottrattore, le rimanenti si dovrebbero supplire con gli zeri verso la sinistra (§. 97.).

PROP. XXIII. PROBL.

§. 103. *Dati due fratti decimali, moltiplicare l'uno di essi per l'altro.*

Sol. Si moltiplichino tra loro i numeratori dei fratti proposti, e se il prodotto contenga un numero di cifre maggiore di quello delle cifre decimali, che si contengono in ambedue i fattori, si dovranno separare da esso con una virgola, e dalla destra verso la sinistra, tante cifre quante sono le cifre decimali in ambedue quei fattori. E se il prodotto contenga lo stesso numero di cifre quante sono le cifre decimali nei due fattori, sarà mestieri porre un zero avanti di esso, e scrivere una virgola tra lo zero e la prima cifra dello stesso prodotto. Che se poi il prodotto dei numeratori dei fratti proposti contenga un numero di cifre minore di quello delle cifre decimali, che vi sieno nei due fattori, bisognerà scrivere avanti di esso tanti zeri, che insieme colle cifre dello stesso prodotto facciano tante cifre, quante sono le cifre decimali di ambedue i fattori. Di poi si dovrà scrivere una virgola avanti al primo zero verso la sinistra, e prima di questa virgola si dovrà scrivere un altro zero. Il fratto decimale, che con tale operazione si ottiene sarà il prodotto dei fratti decimali dati.

Esempio I. Sieno dati i due fratti decimali $25,758$ e $0,93$; fa d'uopo moltiplicare il primo di essi pel secondo.

Si moltiplichino tra loro i numeratori 25758 e 93 dei fratti proposti, e dal prodotto 2395494 si separino con una virgola dalla destra verso la sinistra cinque cifre, quante sono le cifre decimali dei fattori. Il prodotto dei fratti decimali dati sarà $23,95494$.

Esempio II. Sieno dati i due fratti decimali $0,974$ e $0,58$; bisogna moltiplicare l'uno di essi per l'altro.

Si moltiplichino tra loro i numeratori 974 e 58 dei fratti proposti, ed avanti al prodotto 56492 , che contiene tante cifre, quante sono le cifre decimali dei fattori, si scriva un 0 , e tra questo e la prima cifra 5 del prodotto si ponga una virgola. Il prodotto dei fratti decimali dati $0,974$ e $0,58$ sarà il fratto decimale $0,56492$.

Esempio III. Sieno dati i due fratti decimali $23,645$ e $0,000086$; fa d'uopo trovarne il loro prodotto.

Si moltiplichino tra loro i numeratori 23645 ed 86 dei fratti dati, dei quali il primo contiene tre cifre decimali, e l' secondo ne ha sei. Ma il prodotto 2033470 di quei numeratori contiene solo sette cifre. Dunque essendo nove le cifre decimali, che si contengono nei due fratti dati, converrà scrivere tre zeri avanti al detto prodotto, e tra l' primo e l' secondo zero si dovrà scrivere pure una virgola, affinchè le cifre dopo la virgola sieno nove, quante sono quelle, che si contengono in ambedue i fattori. Il perchè il prodotto cercato dev' essere $0,002033470$, ovvero $0,00203347$ (§. 99.).

Dim. E poichè il fratto (Es. II.) decimale $0,974$ è lo stesso dell' altro $\frac{974}{1000}$, e 'l decimale $0,58$ è lo stesso che il fratto $\frac{58}{100}$, il prodotto dei due fratti decimali $0,974$ e $0,58$ dev'essere il prodotto di $\frac{974}{1000}$ per $\frac{58}{100}$. Ma il prodotto di due fratti pareggia un altro fratto, che ha per numeratore il prodotto dei numeratori dei fratti dati, e per denominatore il prodotto dei denominatori dei medesimi. Dunque il prodotto di $\frac{974}{1000}$ per $\frac{58}{100}$ dee pareggiare $\frac{974 \cdot 58}{100000}$. E quindi dal prodotto 56492 di 974 per 58 bisogna separare dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, quanti sono gli zeri, che si contengono nel denominatore 100000 . Ma il numero di questi zeri è uguale a quello delle cifre decimali dei due fattori $0,974$ e $0,58$. Dunque il prodotto, che si domanda dev'essere $0,56492$. C. B. F.

PROP. XXIV. PROBL.

§. 104. *Dato un fratto semplice, ridurlo a fratto decimale di un dato denominatore.*

Sol. A destra del numeratore del fratto semplice proposto si scrivano tanti zeri, quanti se ne contengono nel denominatore dato, e 'l numero, che ne risulta, si divida pel denominatore del fratto semplice. Di poi dal quoto si separino con una virgola tante cifre decimali verso la destra, quanti sono gli zeri del denominatore dato: e se le cifre del quoto sieno minori di

questi zeri in luogo delle rimanenti cifre vi si suppliscano gli zeri a sinistra del quoto. Il fratto decimale, che ne risulta, sarà quello, che si domanda.

Esempio. Sia dato il fratto semplice $\frac{4}{7}$; fa d' uopo ridurlo a fratto decimale, che abbia 1000000 per denominatore.

Si scrivano a destra del numeratore 4 del fratto semplice dato sei zeri, quanti se ne contengono nel denominatore decimale 1000000. Di poi il numero 4000000, che ne risulta, si divida pel denominatore 7 del fratto semplice proposto, e dal quoto 571428, che n' emerge, si separino dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, quanti sono gli zeri del denominatore dato 1000000, cioè sei. Il fratto decimale 0,571428 sarà quello, che si domanda.

Dim. Poichè il fratto $\frac{4}{7}$ è lo stesso (§. 58.)

dell' altro $\frac{4000000}{7000000}$, se dividasì per 7 tanto il numeratore che il denominatore di questo ultimo, dalla prima divisione si otterrà 571428 per quoto e 4 per residuo, e dalla seconda divisione si avrà 1000000 per quoto senza residuo. Il perchè dovrà essere (§. 75.)

$$\frac{4000000}{7000000} = \frac{7 \cdot 571428 + 4}{7 \cdot 1000000},$$

ovvero

$$\frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 571428}{7 \cdot 1000000} + \frac{4}{7 \cdot 1000000}.$$

Ma il fratto (§. 59.) $\frac{7 \cdot 571428}{7 \cdot 1000000}$ è dello stes-

so valore dell' altro $\frac{571428}{1000000}$, ovvero di 0,571428,

ed è poi il fratto $\frac{4}{7 \cdot 1000000}$ minore di 0,000001,

e perciò nel caso proposto può trascurarsi. Dunque il fratto semplice $\frac{4}{7}$ ridotto a fratto decimale del denominatore 1000000 è ad un dipresso uguale a 0,571428. C. B. F.

§. 105. *Cor. I.* Se vogliasi un fratto decimale, che più dell' altro 0,571428 si approssimi al valore di $\frac{4}{7}$, converrà scrivere più di sei zeri a destra del numeratore di esso. Ma poichè nella divisione di 4000000 per 7 si ottiene 8 per ultima cifra del quoto, e 4 per residuo, ponendo un altro zero a destra del numero 4000000, il residuo 4 col zero a destra dee formare il numero 40, che è quello stesso dal quale si è incominciata la divisione. Onde il quoto di questo numero per 7 dovrà essere la prima cifra 5 del quoto 571428 ottenuto dalle precedenti divisioni, e'l residuo dovrà essere pure quello, che si è ottenuto dalla prima divisione di 40 per 7. Dunque aggiungendo altri zeri a destra del numero 4000000 si dovranno ottenere collo stesso ordine le cifre ottenute nelle prime sei divisioni, cioè le cifre 5,7,1,4,2,8,5,7, ec. Vale a dire, che il fratto semplice $\frac{4}{7}$ ridotto a decimale dee pareggiare la frazione

0,571428571428571438, nella quale dopo ogni sei cifre ritorna lo stesso periodo di cifre. E per tal ragione la detta frazione dicesi *periodica*.

§. 106. *Cor. II.* Dunque se nelle divisioni successive, che bisogna fare per ridurre un fratto semplice a fratto decimale, s'incontri un residuo, che sia lo stesso di quello ottenuto nella prima divisione, senza eseguire le altre divisioni si potrà scrivere a destra del quoto ottenuto lo stesso quoto ripetuto una o più volte.

PROP. XXV. PROBL.

§. 107. *Dati due fratti decimali, dividere l'uno di essi per l'altro.*

Sol. I fratti proposti si riducano (§. 99.) allo stesso denominatore ponendovi gli zeri a destra di uno di essi, e dai fratti, che ne risultano, si cancellino le virgole ed i zeri, che talvolta sono alla sinistra di essi. Onde dovranno emergere due numeri intieri, dei quali uno risulta dal dividendo e l'altro dal divisore. Di poi si riduca a fratto decimale (§. 104.) il fratto semplice, che ha per numeratore il primo di questi numeri, e per denominatore il secondo. Il fratto decimale, che si ottiene, sarà il quoto che si domanda.

Esempio. Si voglia dividere il fratto decimale 0,058423 per 0,823. I fratti decimali proposti ridotti allo stesso denominatore sono i seguenti 0,058423 e 0,823000. Onde togliendo gli zeri, e le virgole, che si trovano alla sinistra di questi fratti ridotti, si ottengono i due numeri 58423 e 823000, dei quali il primo risulta dal dividendo e l'altro dal divisore. Intanto il fratto semplice $\frac{58423}{823000}$, che ha per numeratore il primo di quei numeri e per denominatore il se-

coudo, si riduca al fratto decimale 0,0709878. Sarà questo il quoto, che si ottiene dividendo 0,058423 per 0,823.

<i>Dividendo</i>	<i>Divisore</i>
58423000000	823000
5761000	<i>Quoto</i>
	709878
8130000	
7407000	
7230000	
6584000	
6460000	
5761000	
6990000	
6584000	
<i>Residuo</i> 406000	

Dim. Poichè i fratti decimali 0,058423 ed 0,823 sono gli stessi degli altri $\frac{58423}{10000000}$ ed $\frac{823000}{1000000}$, il quoto di 0,058423 per 0,823 dev' essere lo stesso di quello, che si ottiene dividendo il fratto $\frac{58423}{10000000}$ per l'altro $\frac{823000}{1000000}$. Ma (§. 86.) dividendo il primo di questi ultimi fratti pel secondo si ottiene per quoto l'altro fratto $\frac{58423 \cdot 1000000}{823000 \cdot 1000000}$, che è lo stesso di $\frac{58423}{823000}$, il quale ridotto a fratto decimale (§. 104.) pareggia 0,0709878. Dunque il fratto decimale 0,0709878 dev' essere il quoto addimandato. C. B. F.

DEL CALCOLO DEI NUMERI DENOMINATI.

§. 108. *Def. XXII.* I numeri denominati sono quelli ciascuno dei quali ne dinota una grandezza con numeri intieri separati tra loro, e le cui unità differiscono in valore.

§. 109. *Scol.* Affinchè si possa bene intendere la definizione dei numeri denominati, fa mestieri ricordarsi, che qualora negli usi della società per valutare certe grandezze si stabilisca una qualche unità, a cui quelle grandezze si devono rapportare, convien pure stabilire alcune unità minori delle precedenti per valutare le grandezze, che contengono una o più volte l'unità maggiore con una o più volte l'unità minore. Così tra noi si stabilisce la *canna* per unità di lunghezza, la quale dividevasi in otto parti uguali, che si dicevano *palmi*: il palmo poi veniva diviso in dodici parti uguali, che si dicevano *once*, e l'oncia dividevasi in cinque parti uguali, che si chiamavano *minuti*. Adunque per calcolare i numeri denominati si devono conoscere i rapporti, che le parti di essi hanno sì tra loro, che coll'unità principale: e per tal ragione vò quaggiù rapportare una tavola dei numeri denominati, che sono di un uso più frequente nella società.

TAVOLA

DI ALCUNE DIFFERENTI SPECIE DI UNITA', E DEI CARATTERI, ONDE ESSE NE VENGONO DINOTATE.

PER LE MONETE.

Duc. dinota Ducato	1 Ducato vale 10 carlini
Car. Carlino	1 Carlino vale 10 grana
Gr. Grano	1 Grano vale 12 cavalli
Cav. Cavallo	
L. Lira	1 Lira vale 20 soldi
S. Soldo	1 Soldo vale 12 denari
D. Denaro	
ec.	ec.

PER I PESI.

l. dinota . . . libbra	1 libbra vale 12 once
on. oncia	1 oncia vale 10 dramme
dr. dramma	1 dramma vale 3 trappesi
tr. trappeso	1 trappeso vale 20 acini
ac. acino	
ec.	ec.

PER LE MISURE LINEARI.

can. dinota canna	1 canna antica valeva 8 pal.
pal. palmo	1 palmo valeva 12 once
on. oncia	1 oncia valeva 5 minuti
min. minuto	
T. dinota . . Tesa	1 Tesa vale . . 6 piedi
P. Piede	1 piede vale . 12 pollici
p. pollice	1 pollice vale . 12 linee
l. linea	
ec.	ec.

§. 110. *Dati più numeri denominati omogenei, prenderne la loro somma.*

Sol. I numeri proposti si scrivano gli uni sopra degli altri, tal che le parti della stessa specie si trovino in una medesima colonna verticale, e sotto di essi si distenda una linea. Di poi si cominci la somma dalle parti della specie più piccola. Se la somma di queste parti non forni una o più unità della specie immediatamente superiore, la stessa si scriva sotto le unità della sua specie. Ma se quella somma costituisca una o più unità della specie immediatamente superiore, si scriva l'eccesso di detta somma sulle unità di questa seconda specie, e si ritengano le unità della stessa seconda specie per aggiungerle alle loro simili: così si dovrà procedere in appresso.

Esempio. Si vogliano sommare i numeri denominati omogenei $254^l. 7^{on}. 2^{dr}. 1^{tr}. 13^{ac.}, 327^l. 5^{on}. 7^{dr}. 2^{tr}. 8^{ac.}, 198^l. 6^{on}. 9^{dr}. 0^{tr}. 17^{ac.}, 278^l. 9^{on}. 4^{dr}. 2^{tr}. 15^{ac.}$.

I numeri proposti si scrivano, come quaggiù si vede, in modo che gli acini corrispondano sopra gli acini, i trappesi sopra trappesi, e così in appresso, e sotto quei numeri in tal guisa disposti si distenda una linea. Di poi si prenda la somma 53 degli acini 13, 8, 17, e 15, che sono nei numeri dati. Onde contenendosi in 53 acini 2 trappesi e 13 acini, l'eccesso 13 si scriva sotto la linea nella direzione degli acini, ed i 2 trappesi si aggiungano alla somma 5 trappesi di $1^{tr.}, 2^{tr.}, 0^{tr.},$ e $2^{tr.}$, che si conten-

gono nei numeri proposti. Ma i 7 trappesi, che risultano da quell'addizione contengono due dramme ed 1 trappeso. Dunque si scriva 1^{tr}. nella linea dei trappesi, e le 2 dramme si aggiungano alla somma delle dramme. Nella stessa guisa dovrà procedersi in appresso.

$$254^l. \quad 7^{on}. \quad 2^{dr}. \quad 1^{tr}. \quad 13^{ac}.$$

$$327^l. \quad 5^{on}. \quad 7^{dr}. \quad 2^{tr}. \quad 8^{ac}.$$

$$198^l. \quad 6^{on}. \quad 9^{dr}. \quad 0^{tr}. \quad 17^{ac}.$$

$$278^l. \quad 9^{on}. \quad 4^{dr}. \quad 2^{tr}. \quad 15^{ac}.$$

$$1059^l. \quad 5^{on}. \quad 4^{dr}. \quad 1^{tr}. \quad 13^{ac}.$$

PROP. XXVII. PROBL.

§. 111. *Dati due numeri denominati omogenei, sottrarre il minore di essi dal maggiore.*

Sol. Si dispongano i numeri proposti l'uno sull'altro, come nella somma, e sotto di essi si distenda una linea. Di poi si cominci la sottrazione dalle unità della specie più piccola, e se il numero delle più piccole unità del sottrattore non sia maggiore di quello del diminuendo, si scriva il residuo sotto la linea. Ma se il primo numero sia maggiore del secondo, si prenda nel diminuendo una unità della specie immediatamente superiore, e si riduca ad unità della specie inferiore. Questo numero, che risulta, aggiunto al numero delle più piccole unità, che sono nel diminuendo darà una somma maggiore del numero delle più piccole unità del sottrattore. Onde la differenza tra questa somma

e'l numero delle più piccole unità del sottrattore si dovrà scrivere sotto la linea in direzione verticale colle unità dell' infima specie. In oltre se nel diminuendo una qualche unità della specie immediatamente superiore all' infima siasi ridotta ad unità più piccole, si diminuisca di 1 quella specie di unità, e si prosegua nello stesso modo la sottrazione.

Esempio. Si voglia sottrarre il numero denominato 523^{can.} 3^{pal.} 8^{on.} 2^{min.} dall'altro 2073^{can.} 3^{pal.} 5^{onc.} 1^{m.} .

Si dispongano i numeri dati in modo che i minuti corrispondano sopra i minuti, le once sulle once, e così in seguito, e sotto di essi si distenda una linea. Ora essendo i 2 minuti del sottrattore maggiori di 1 minuto del diminuendo, si riduca 1 oncia del diminuendo a 5 minuti, che sommati con 1 minuto danno 6 minuti, da cui sottraendone 2, si avrà per residuo 4 minuti. Quindi le cinque once del diminuendo sono ora ridotte a 4. Ma le once del sottrattore sono più di 4. Dunque se 1 palmo del diminuendo si riduca a 12 once, ed a queste vi si aggiungano le 4 once, che vi erano, nel diminuendo ne dovranno risultare 16 once, ed i 2 palmi si saranno ridotti ad 1 solo. Onde dalle 16 once se ne potranno sottrarre le 8 e ne resteranno altre 8, e dovendosi pure sottrarre i 3 palmi del sottrattore dai 2 palmi che vi sono restati nel diminuendo, bisognerà pure ridurre 1 canna ad 8 palmi, che aggiunti a quei 2 palmi fanno 10 palmi. Dunque sottraendo 3 palmi da 10 palmi si avranno 7 palmi, e nel diminuendo vi resteranno 2072 canne, da cui si devono sottrarre 523 canne, come quaggiù si vede.

Diminuendo 207^{3can.} 3^{pal.} 5^{onc.} 1^{min.}
Sottrattore 523^{can.} 3^{pal.} 8^{onc.} 2^{min.}

Residuo 1549^{can.} 7^{pal.} 8^{onc.} 4^{min.}

PROP. XXVIII. PROBL.

§. 112. *Moltiplicare un numero denominato per un numero astratto.*

Sol. Si scriva il numero astratto sotto al numero denominato, e sotto di essi si distenda una linea. Di poi si moltiplichino separatamente le differenti unità del numero denominato pel numero astratto, ed i prodotti che si ottengono da queste moltiplicazioni si scrivano sotto la detta linea. In oltre si sommino i prodotti parziali di quelle differenti specie di unità (§. 40) pel numero astratto. Finalmente del prodotto in tal guisa ottenuto si dividano le unità più piccole pel numero di esse, che costituisce una unità maggiore: il quoto di tal divisione si aggiunga al prodotto delle unità di questa seconda specie pel numero astratto, e 'l residuo si scriva sotto le unità dell'infima specie. Di poi la somma del detto quoto e del prodotto delle unità della seconda specie si divida pel numero delle unità di questa seconda specie, che costituisce una unità della terza specie. Nello stesso modo si prosegua l'operazione in appresso.

Esempio. Si voglia moltiplicare il numero denominato 37^{r.} 3^{p.} 7^{p.} 3^{l.} pel numero astratto 58.

Si scriva il primo dei numeri dati sul secondo, e sotto di essi si distenda una linea. Di poi si moltiplichino per 58 prima le 3^{l.}, indi i 7^{p.}, in seguito i 3^{p.}, e finalmente le 37^{r.},

ed i prodotti parziali si scrivano sotto la detta linea. In oltre si distenda una linea sotto i prodotti parziali, di cui se ne prenda la somma, che sarà $2146^{\text{r.}}$ $174^{\text{p.}}$ $406^{\text{p.}}$ $174^{\text{l.}}$. Ma il 12 in 174 vi si contiene 14 volte col resto di 6. Dunque $174^{\text{l.}}$ contengono $14^{\text{p.}}$ e $6^{\text{l.}}$ Si aggiungano intanto i $14^{\text{p.}}$ a $406^{\text{p.}}$, che si sono ottenuti dalla moltiplicazione di $7^{\text{p.}}$ per 58; si avrà per somma $420^{\text{p.}}$, che conterranno tanti piedi, quante sono le unità del quoto di 420 per 12. Ma il 12 in 420 si contiene 35 volte risultandone 0 per residuo. Dunque si ponga $0^{\text{p.}}$ sotto l'ultima linea ed in direzione coi pollici del numero denominato dato, ed al prodotto 174 dei piedi, che si contengono nello stesso numero denominato pel numero astratto 58 vi si aggiungano $35^{\text{p.}}$, e si prosegua l'operazione nello stesso modo, come quaggiù vedesi espressa.

	$37^{\text{r.}}$	$3^{\text{p.}}$	$7^{\text{p.}}$	$3^{\text{l.}}$
				58
	296	24	56	24
	185	15	35	15
	$2146^{\text{r.}}$	$174^{\text{p.}}$	$406^{\text{p.}}$	$174^{\text{l.}}$
3. ^o Qu.	34	2. ^o Qu.	35	1. ^o Qu. 14
Som.	2180	Som.	209	Som. 420
Pr.tot. =	$2180^{\text{r.}}$	$5^{\text{p.}}$	$0^{\text{p.}}$	$6^{\text{l.}}$
1. ^a Divisione.	2. ^a Divisione.	3. ^a Divisione.		
Dividendo Divisore	Dividendo Divisore	Dividendo Divisore		
174 12	420 12	209 6		
12 Quoto	36 Quoto	18 Quoto		
14	35	34		
54	60	29		
48	60	24		
Res.... 6	Res.... 0	Res... 5		

§. 113. *Dividere un numero denominato per un numero astratto.*

Sol. Si divida pel numero astratto dato quel numero, che nel dividendo contiene le unità della specie più grande, e 'l residuo della divisione si riduca ad unità della specie prossimamente inferiore alla precedente. Di poi le unità di questa seconda specie, che si ottengono dal residuo di tal divisione, si aggiungano alle unità di questa medesima specie, che sono nel dividendo, e la somma si divida pel numero astratto dato. Nello stesso modo si prosegua l'operazione in appresso. I quoti della prima, seconda ec. divisione dovranno rispettivamente dinotare le unità della specie più grande del quoto, quelle della seconda specie, e così in seguito.

Esempio. Si voglia dividere il numero denominato 278^{l.} 3^{l.} 8^{o.} per 25.

Si dividano 278^{l.} per 25. Si avrà 11^{l.} per quoto e 3^{l.} per residuo. Ma le 3^{l.} di residuo equivalgono a 60^{o.}, che aggiunti a 3^{l.}, che sono nel numero denominato dato, danno per somma 63^{o.}. Dunque dividendosi 63^{o.} per 25, il quoto 2 dovrà dinotare il numero dei soldi, che si conteranno nell'intero quoto del numero denominato dato pel numero astratto 25, e 'l residuo 13^{o.} dovrà moltiplicarsi per 12, affin di ridurlo a denari. Ma il prodotto di 13 per 12 adegna 156. Dunque nel residuo poc' anzi ottenuto vi si contengono 156^{o.}. Onde se al numero 156^{o.} vi si aggiungano gli 8^{o.}, che sono nel numero denominato dato, e la somma 164^{o.} si

divida pel numero astratto 25; il quoto 6 di tal divisione dovrà dinotarne i denari che si contreranno nel quoziente domandato, cui dovrà aggiungersi pure il fratto $\frac{14}{25}$ di denaro. Ed ecco quaggiù per disteso il calcolo dell'indicate operazioni.

<i>Dividendo</i>			<i>Divisore</i>
278 ^{l.}	3 ^{s.}	8 ^{o.}	25
25	60	156	Quoto della 1. ^a Divisione = 11 ^{l.}
—	—	—	
28	63	164	Quoto della 2. ^a Divisione = 2 ^{s.}
25	50	150	
—	—	—	
Res. 3	13	14	Quoto della 3. ^a Divisione = 6 ^{o.}
			Residuo della 3. ^a Divisione = 14 ^{o.}

Dunque l'intero quoto dovrà essere $11^l. 2^s. 6^o. \frac{14^o}{25}$.

C A P. VI.

DEL MODO DI FORMARE IL QUADRATO ED IL CUBO DI QUALUNQUE NUMERO.

§. 114. *Def. XXIII.* Ogni numero moltiplicato per se stesso dà un prodotto, che dicesi *quadrato* o *seconda potenza* di esso numero, il quale chiamasi *radice quadrata* o *radice seconda* di quel prodotto.

§. 115. *Cor. I.* E poichè 100 è il quadrato di 10, 10000 quello di 100, 1000000 quello di 1000, e così in appresso; l'è chiaro, che i quadrati dei numeri semplici debbono trovarsi

tra 1 e 99, ovvero essi debbono contenere una o due cifre; quelli dei numeri formati da due cifre debbono trovarsi tra 100 e 9999, cioè debbono contenere tre, o quattro cifre; quelli dei numeri formati da tre cifre ne debbono contenere cinque, o sei, e così in appresso. Vale a dire, che *il quadrato di un qualunque numero dee contenere il doppio numero di cifre, che si contengono in esso, ovvero il doppio numero di tali cifre diminuito di uno.*

§. 116. *Cor. II.* I quadrati dei numeri semplici

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

sono 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,

che bisogna aver presenti nelle operazioni, che in appresso saranno indicate.

§. 117. *Scol. I.* Affinchè ciascuno si possa formare un' adeguata idea delle unità del quadrato di un numero, distendasi (*fig. 1.*) la retta AB di quella lunghezza, che ne piaccia, ed essa si prolunghi insino al punto G, tal che la AG per es. contenga la AB sei volte: e sieno AB, BC, CD, DE, EF, FG le sei parti uguali della retta AG. Di poi sulla retta AG si formi il quadrato AH, ed il lato AI di questo si divida nei punti K, L, M, N, O in sei parti, ciascuna uguale ad AB. In oltre, pei punti B, C, D, E, F si distendano altrettante linee rette parallele ad AI, ovvero a GH, e pei punti K, L, M, N, O si distendano pure altrettante linee rette parallele ad AG, ovvero ad IH. Or poichè le figure, che risultano dalle intersezioni di quelle rette parallele ad AI ed AG, hanno i lati opposti paralleli, esse devono essere altrettanti parallelogrammi. Ma i parallelogrammi KB, BP, PD, DQ, QF FR,

hanno retti gli angoli, che sono nei punti A, B, C, D, E, F. Dunque tali parallelogrammi debbono essere rettangoli. Il perchè essendo la retta AK uguale all'altra AB, il rettangolo AB dev'essere un quadrato. Ma la retta AK è uguale non solo a ciascuna delle PC, QE, RG, che a ciascuna delle altre BC, CD, DE, EF, FG. Dunque anche i rettangoli BP, PD, DQ, QF, FR debbono essere altrettanti quadrati, i quali essendo formati sopra le rette BC, CD, ec. uguali tra loro, non che alla retta AB, debbono essere anche tra se uguali, e ciascuno uguale al quadrato KB. Nello stesso modo potrà dimostrarsi, che le figure parallelogramme contenute nei rettangoli LR, MX, NY, OZ, ed OH debbano essere altrettanti quadrati ciascuno uguale al quadrato KB, che è formato sulla retta AB. Ma poichè i quadrati uguali a KB, che sono formati sulla retta AG, sono tanti di numero, quante sono le parti della AG uguali ad AB; l'è chiaro che nell'intero quadrato AH vi si debbano contenere tanti quadrati uguali a KB, quant'è il numero dei quadrati contenuti nel rettangolo AR preso tante volte, quante sono le parti della AI uguali ad AB, cioè quanti sè ne contengono nel prodotto di 6 per 6. Onde essendo 36 il prodotto di 6 per 6, nel quadrato AH vi si dovranno contenere 36 quadrati ciascuno uguale a quello di AB. Dunque *se le unità di un numero ne dinotino linee rette uguali; le unità del quadrato di esso numero dovranno dinotarne quadrati, di cui ciascuno è formato sopra una di tali rette.*

§. 118. Scol. II. In oltre, se la retta AG

sia divisa in sei parti, ciascuna uguale ad AB , e sulla stessa retta si formi il rettangolo AZ , che abbia l'altro lato AN quadruplo di AB , e si faccia la costruzione indicata nel §. prec.; si potrà in facil modo rilevare, che nel rettangolo AZ vi si debbano contenere tanti quadrati uguali a KB , quante sono le unità del prodotto di 6 per 4. Vale a dire, che *qualora le unità di due numeri ne dinotano linee rette uguali; le unità del prodotto di essi dovranno dinotarne quadrati, di cui ciascuno è formato sopra una di tali rette.*

§. 119. Def. XXIV. Un numero moltiplicato pel suo quadrato dà un prodotto, che dicesi *cubo o terza potenza* di esso numero, il quale chiamasi *radice cubica o radice terza* rispetto a quel prodotto.

§. 120 Cor. I. Essendo 1000 il cubo di 10, 1000000 quello di 100, 1000000000 quello di 1000, ec; i cubi dei numeri minori di 10 devono trovarsi tra 1 e 999, quelli dei numeri, che sono da 10 fino a 99 devono trovarsi tra 1000 e 999999, ec. Ma i numeri, che sono tra 1 e 999 contengono una, due, o tre cifre: i numeri che sono tra 1000 e 999999 contengono quattro, cinque, o sei cifre, ec. Dunque *il cubo di un qualunque numero contiene il triplo numero delle cifre, che si contengono in esso, ovvero il triplo numero delle stesse cifre diminuito di uno, o di due.*

§. 121. Cor. II. I cubi dei numeri semplici
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
sono 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,
di cui bisogna ricordarsi nelle operazioni, che in seguito saranno indicate.

§. 122. *Scol. I.* I Geometri chiamano *cubo* quella figura solida terminata da sei quadrati uguali. Tale è (*fig. 2.*) il solido ABCDHEFG, che è terminato dai sei quadrati uguali AH, AC, AF, EB, EG, ED. Or se ciascuno dei tre lati AB, AD, AG di detta figura si divida p. es. in quattro parti tra se uguali, e pei punti I, K, L delle divisioni del lato AB si concepiscano distese altrettante superficie piane parallele ai piani AH, BE, pei punti M, N, O si concepiscano distesi altrettanti piani paralleli agli altri AC, GE, e pei punti P, Q, R si concepiscano pure distesi altrettanti piani paralleli agli altri AF, DE; sarà chiaro, che le intersezioni dei detti piani coi piani terminanti il cubo debbano essere altrettante rette parallele ai lati dello stesso. Il perchè ciascun quadrato, da cui il cubo è terminato, dovrà (§. 117.) restarne diviso in sedici quadrati tra se uguali, e l'intero cubo ABCDHEFG ne sarà diviso da quelle superficie piane in cubi anche tra se uguali, come è APSITXVM. E quindi sulla base ABCD del cubo ABCDHEFG vi devono poggiare colle loro basi tanti cubi uguali ad APSITXVM, quanti sono i quadrati uguali ad AISP, in che la stessa base vien divisa; cioè 16. Ma questo numero di cubi si contiene tante volte nel cubo ABCDHEFG, quante sono le parti della AG uguali ad AM, cioè quattro volte. Dunque devono essere 64 i cubi uguali ad APSITXVM, che si contengono nel cubo ABCDHEFG. E quindi essendo 64 il prodotto di 4 pel suo quadrato 16; l'è chiaro, che *se le unità, di un qualunque numero ne dinotino linee rette uguali; le unità del cubo di esso nume-*

ro ne dovranno dinotare cubi , di cui ciascuno ha per lato una di quelle rette.

§. 123. Scol. II. In oltre , se il lato AL del rettangolo QL sia il triplo della retta AI, e l'altro lato AQ ne sia il doppio, sul rettangolo QL vi dovranno poggiare le basi di sei cubi uguali ad APSITXVM. E quindi nel solido terminato dai tre rettangoli QL, LG, QG, e dagli opposti a questi vi si dovranno contenere tante volte sei cubi ciascuno uguale ad APSITXVM quante sono le parti della AG uguali ad AM, cioè quattro. Vale a dire, che nel solido terminato dai tre rettangoli QL, LG, GQ, e dagli altri tre, che sono opposti a questi, vi si debbono contenere, 24 cubi ciascuno uguale ad APSITXVM. Ma il numero 24 risulta dalla moltiplica di 2 per 3 e per 4. Dunque se le unità di tre numeri ne dinotano linee rette uguali, quelle del prodotto di essi numeri dovranno dinotarne cubi, di cui ciascuno ha per lato una di quelle rette.

PROP. XXX. PROBL.

§. 124. Se un numero qualunque si divida in due parti; il quadrato di esso dovrà pareggiare i quadrati delle parti insieme col doppio prodotto di ambedue le parti.

Dim. Se il numero 57 p. es. si divida nelle due parti 25 e 32; il quadrato di esso dovrà pareggiare 57 preso 25 volte aggiunto a 57 preso 32 volte, ovvero a

$$57 \times 25 + 57 \times 32.$$

Ma il prodotto di 57 per 25 o di 25 per 57 (§. 35.) è lo stesso che 25 preso 25 volte ag-

giunto a 25 preso 32 volte, ed il prodotto di 57 per 32, o di 32 per 57 è pure uguale a 32 preso 25 volte insieme con 32 preso 32 volte. Dunque dev'essere

$$\begin{array}{l} 57 \times 25 = 25 \times 25 + 32 \times 25 \\ \text{e} \quad 57 \times 32 = \quad \quad \quad 32 \times 25 + 32 \times 32. \end{array}$$

E quindi ne risulta $57 \times 25 + 57 \times 32$, ovvero il quadrato di 57 uguale a

$$25 \times 25 + 2 \times 32 \times 25 + 32 \times 32.$$

Vale a dire, che se un numero ec. C. B. D.

§. 125. *Cor. I.* Se da un qualunque numero se ne tolga 1; il quadrato di esso numero sarà uguale al quadrato del residuo insieme col doppio prodotto di quel residuo moltiplicato per 1, e col quadrato di 1. Ma il doppio del residuo moltiplicato per 1 è il doppio dello stesso residuo, ed è 1 il quadrato di 1. Dunque il quadrato del detto numero dev'essere uguale al quadrato del residuo insieme col doppio dello stesso residuo aumentato di 1.

§. 126. *Cor. II.* E quindi il quadrato di un qualunque numero dev'essere minore di quello dello stesso numero aumentato di 1 per quanto è il doppio del numero proposto aggiuntovi 1.

§. 127. *Cor. III.* Il perchè la radice quadrata di un numero intiero non si può sempre ottenere esattamente, ma spesso si ottiene per approssimazione, come si vedrà nel seguente Cap.

PROP. XXXI. TEOR.

§. 128. *Se le diverse cifre di un numero composto si considerino come numeri semplici; il quadrato di esso numero si otterrà prendendo la somma del quadrato della prima ci-*

fra a sinistra, del doppio della prima cifra moltiplicata per la seconda, del quadrato della seconda, del doppio del numero dinotato dalle due prime cifre moltiplicato per la terza, del quadrato della terza, ec., tal che questi numeri sieno scritti in modo che le unità del primo corrispondano sulle decine del secondo, le unità del secondo sulle decine del terzo, ec.

Dim. Poichè il quadrato p. es. del numero 8749 adegna (§. 124.)

$$8740 \times 8740 + 2 \times 8740 \times 9 + 9 \times 9,$$

ed è $8740 \times 8740 = 8700 \times 8700 + 2 \times 8700 \times 40 + 40 \times 40$;
dovrà essere

$$8749 \times 8749 = 8700 \times 8700 + 2 \times 8700 \times 40 + 40 \times 40 + 2 \times 8740 \times 9 + 9 \times 9.$$

Ma il quadrato del numero 8700, o sia il prodotto di 8700 per 8700 è uguale ad (§. 124.)

$$8000 \times 8000 + 2 \times 8000 \times 700 + 700 \times 700.$$

Dunque dev' essere il quadrato di 8749, ovvero

$$8749 \times 8749 = 8000 \times 8000 + 2 \times 8000 \times 700 + 700 \times 700 + 2 \times 8700 \times 40 + 40 \times 40 + 2 \times 8740 \times 9 + 9 \times 9.$$

Il perchè essendo

64000000 il quadrato di 8000,

11200000 il doppio prodotto di 8000 per 700,

490000 il quadrato di 700,

696000 il doppio prodotto di 8700 per 40,

1600 il quadrato di 40,

157320 il doppio prodotto di 8740 per 9,

81 il quadrato di 9;

sarà 76545001 il quadrato del numero 8749.

Ma la somma del quadrato di 8000, del doppio prodotto di 8000 per 700, del quadrato di 700, ec. è la stessa dell'altra, che si otterrebbe cancellando da tali quadrati e doppii prodotti tutti

gli zeri, che risultano da quelli, che sono alla destra dei fattori 8000, 700, ec., scrivendo quei numeri collo stesso ordine quassù rapportato, ed in modo che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo, le unità di questo sulle diecine del terzo, ec. Dunque se le diverse cifre di un numero composto ec. C. B. D.

Esempio I. Si voglia formare il quadrato del numero 50042.

Si prenda il quadrato 25	di 5,
il doppio prodotto . . 00	di 5 per 0
il quadrato 00	di 0,
il doppio prodotto . . 00	di 50 per 0,
il quadrato 00	di 0,
il doppio prodotto . . 4000	di 500 per 4,
il quadrato 16	di 4,
il doppio prodotto . . 20016	di 5004 per 2,
e 'l quadrato	4 di 2;

la somma . 2504201764 sarà il quadrato di 50042.

Esempio II. Si voglia formare il quadrato del numero 3974.

Si prenda il quadrato 9	di 3,
il doppio prodotto . 54	di 3 per 9,
il quadrato 81	di 9,
il doppio prodotto . . 546	di 39 per 7,
il quadrato 49	di 7,
il doppio prodotto . . 3176	di 397 per 4,
e 'l quadrato	16 di 4;

la somma . . 15792676 sarà il quadrato di 3974.

§. 129. *Cor. I.* Essendo il prodotto di due fratti uguale a quel fratto, che ha per numeratore il prodotto dei numeratori di quei primi,

e per denominatore il prodotto dei loro denominatori (§. 81.); l'è chiaro, che il quadrato di un fratto debba essere un altro fratto, il cui numeratore sia il quadrato del numeratore del proposto, e l' denominatore sia il quadrato del denominatore dello stesso.

§. 130. *Cor. II.* E se vogliasi il quadrato di un numero intiero unito ad un fratto, converrà ridurre l' intiero e l' fratto ad un sol fratto (§. 60.), e poi del fratto, che ne risulta dovrà formarsene il quadrato (§. 129.)

§. 131. *Cor. III.* In oltre, poichè il quadrato di un fratto decimale, o di un numero intiero unito ad un decimale dee contenere il doppio numero di cifre decimali, che sono nella radice (§. 103.); l'è chiaro, che quel quadrato può formarsi considerando il numero dato come se fosse intiero, e poi separando con una virgola dalla destra verso la sinistra dello stesso quadrato tante cifre decimali, che sieno in numero il doppio di quelle, che si contengono nella radice.

§. 132. *Cor. IV.* Finalmente per ottenere il quadrato di un numero denominato converrà ridurrelo ad un numero intiero, le cui unità sieno quelle dell' infima specie del numero denominato dato, e di poi dovrà formarsi il quadrato del numero intiero ottenuto.

Esempio Si voglia determinare il quadrato del numero denominato $32^{\text{can.}}$ $3^{\text{pal.}}$ $5^{\text{on.}}$ $2^{\text{min.}}$.

Essendo la canna di 8 palmi, in 32 canne vi si conterranno 32 volte 8 palmi, cioè 256 palmi, e $32^{\text{can.}}$ $3^{\text{pal.}}$ equivaleranno a 259 palmi. Ma in ogni palmo vi si contengono 12 once. Dunque in $259^{\text{pal.}}$ si dovranno contenere $3108^{\text{on.}}$

E quindi in $32^{\text{can.}}$ $3^{\text{pal.}}$ $5^{\text{onc.}}$ si conterranno $3113^{\text{onc.}}$. Ma ogni oncia contiene 5 minuti. Dunque in $3113^{\text{onc.}}$ si dovranno contenere 15565 minuti, ed in $3113^{\text{on.}}$ $2^{\text{min.}}$, o sia in $32^{\text{can.}}$ $3^{\text{pal.}}$ $5^{\text{on.}}$ $2^{\text{min.}}$ si conterranno $15567^{\text{min.}}$, di cui il quadrato adegua $242331489^{\text{min. qu.}}$. Or poichè la lunghezza di un' oncia contiene 5 minuti, il quadrato di un' oncia (§. 117.) dovrà contenere 25 quadrati, di cui ciascuno ha per lato la retta di un minuto; e quindi nel numero $242331489^{\text{min. qu.}}$ si dovranno contenere tante once quadrate per quante volte il 25 si contiene in esso. Ma il 25 in $242331489^{\text{min. qu.}}$ si contiene 9693259 rimanendovi 14. Dunque il quadrato del proposto numero denominato dee pareggiare $9693259^{\text{on. qu.}}$ $14^{\text{on. qu.}}$. In oltre essendo la lunghezza di un palmo uguale a 12 once, e con ciò il quadrato di un palmo (§. 117.) uguale a 144 once quadrate; nel quadrato del numero proposto si dovranno contenere tanti palmi quadrati, quante sono le unità del quoto di $9693259^{\text{on. qu.}}$ per 144. Ma un tal quoto adegua 67314 rimanendovi 43. Dunque il quadrato del proposto numero dee pareggiare $67314^{\text{pal. qu.}}$ $43^{\text{on. qu.}}$ $14^{\text{min. qu.}}$. Finalmente, poichè la canna dividesi in 8 palmi; il quadrato della canna conterrà 64 palmi quadrati, ed in $67314^{\text{pal. qu.}}$ si dovranno contenere tante canne quadrate; quante sono le unità del quoto di 67314 per 64. Ma il 64 in 67314 vi si contiene 1051 col residuo 50. Dunque il quadrato del numero $32^{\text{can.}}$ $3^{\text{pal.}}$ $5^{\text{on.}}$ $2^{\text{min.}}$ dee pareggiare $1051^{\text{can. qu.}}$ $50^{\text{pal. qu.}}$ $43^{\text{on. qu.}}$ $14^{\text{mi qu.}}$.

§. 133. Se un numero qualunque si divida in due parti; il cubo di esso dovrà pareggiare la somma dei cubi delle parti insieme col triplo quadrato di una parte moltiplicato per l'altra aggiunto al triplo quadrato di questa seconda parte moltiplicato per la prima.

Dim. Se p. es. il numero 57 si divida nelle due parti 25 e 32, il quadrato di esso sarà uguale a

$$25 \times 25 + 2 \times 25 \times 32 + 32 \times 32,$$

e l' cubo dovrà pareggiare

$$25 \times 25 \times 57 + 2 \times 25 \times 32 \times 57 + 32 \times 32 \times 57.$$

Ma il prodotto di 25 per 25 moltiplicato per 57 adegua il prodotto di 25 per 25 preso 25 volte e 32 volte, ovvero quel prodotto è uguale a

$$25 \times 25 \times 25 + 25 \times 25 \times 32:$$

il prodotto $2 \times 25 \times 32$ per 57 è pure uguale a

$$2 \times 25 \times 32 \times 32 + 2 \times 25 \times 32 \times 25;$$

ed è finalmente il prodotto $32 \times 32 \times 57$ uguale a

$$32 \times 32 \times 25 + 32 \times 32 \times 32.$$

Dunque dev' essere

$$25 \times 25 \times 57 + 2 \times 25 \times 32 \times 57 + 32 \times 32 \times 57,$$

ovvero il cubo di 57 uguale a

$$25 \times 25 \times 25 + 25 \times 25 \times 32$$

$$+ 2 \times 25 \times 25 \times 32 + 2 \times 25 \times 32 \times 32$$

$$+ 32 \times 32 \times 25 + 32 \times 32 \times 32.$$

Ma i due prodotti $25 \times 25 \times 32$ e $2 \times 25 \times 25 \times 32$ insieme

presi sono uguali a $3 \times 25 \times 25 \times 32$, e gli altri due

$2 \times 25 \times 32 \times 32$ e $32 \times 32 \times 25$ insieme presi adeguano

$3 \times 25 \times 32 \times 32$. Dunque dev'essere

$$57 \times 57 \times 57 = 25 \times 25 \times 25 + 3 \times 25 \times 25 \times 32 + 3 \times 25 \times 32 \times 32$$

$$+ 32 \times 32 \times 32.$$

Vale a dire, che se un numero qualunque ec.

C. B. D.

§. 134. *Cor. I.* Se da un numero se ne toglia 1, il cubo di esso numero sarà uguale al cubo del residuo, insieme col triplo quadrato del residuo moltiplicato per 1, aggiuntovi il triplo quadrato di 1 moltiplicato per quel residuo ed il quadrato di 1; ovvero il cubo del detto numero dovrà pareggiare il cubo del residuo aggiuntovi il triplo quadrato di questo, il triplo dello stesso, ed 1.

§. 135. *Cor. II.* E quindi il cubo di un numero dee differire da quello dello stesso numero aumentato di 1 per quanto è il triplo quadrato di esso aggiunto al triplo dello stesso numero aumentato di 1.

§. 136. *Cor. III.* Il perchè la radice cubica di un qualunque numero non si può sempre ottenere esattamente, ma spesso si ottiene per approssimazione, come si vedrà nel seguente Capo.

PROP. XXXIII. TEOR.

§. 137. *Se le diverse cifre di un numero composto si considerino come numeri semplici; il cubo di esso numero si otterrà prendendo la somma del cubo della prima cifra a sinistra, del triplo quadrato di essa prima cifra moltiplicato per la seconda, del triplo quadrato della seconda moltiplicato per la prima, del cubo della seconda, del triplo quadrato del numero dinotato dalle due prime cifre moltiplicato per la terza, del triplo quadrato della terza cifra moltiplicato pel numero dinotato dalle due prime cifre, del cubo della terza cifra, &c., tal che questi numeri sieno*

scritti in modo che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo, le unità del secondo sulle diecine del terzo, ec.

Dim. Il numero 874 p. es. si divida nelle due parti 870 e 4; sarà il cubo di esso numero uguale (§. 133.) ad

$$870 \times 870 \times 870 + 3 \times 870 \times 870 \times 4 + 3 \times 870 \times 4 \times 4 + 4 \times 4 \times 4.$$

Ma $870 \times 870 \times 870$ adogna (§. 133.)

$$800 \times 800 \times 800 + 3 \times 800 \times 800 \times 70 + 3 \times 800 \times 70 \times 70 + 70 \times 70 \times 70$$

Dunque dev' essere

$$874 \times 874 \times 874 = 800 \times 800 \times 800 + 3 \times 800 \times 800 \times 70 + 3 \times 800 \times 70 \times 70 + 70 \times 70 \times 70 + 3 \times 870 \times 870 \times 4 + 3 \times 870 \times 4 \times 4 + 4 \times 4 \times 4.$$

Il perchè essendo

512000000 il cubo di 800,

134400000 il trip. quad. di 800 mult. per 70,

11760000 il trip. quad. di 70 mult. per 800,

343000 il cubo di 70,

9082800 il trip. quad. di 870 mult. per 4,

41760 il trip. quad. di 4 mult. per 870,

e 64 il cubo di 4,

la so. 667627624 dei detti numeri sarà il cubo del numero 874. Ma tal somma è la stessa di quella, che si otterrebbe cancellando da quei numeri tutti gli zeri, che sono alla destra dei fattori 800, 70, ed 870, e scrivendo quei numeri in modo che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo, le unità del secondo sulle diecine del terzo, ec. Dunque se le diverse cifre ec. C. B. D.

Esempio I. Si voglia determinare il cubo di 297,

Si prenda il cubo. . . 8	di 2 ,
il triplo quadrato. . . 108	di 2 mult. per 9,
il triplo quadrato. . . 486	di 9 mult. per 2,
il cubo 729	di 9 ,
il triplo quadrato. . . 17661	di 29 mult. per 7,
il triplo quadrato. . . 4263	di 7 mult. per 29,
e 'l cubo 343	di 7 ,

la somma . . 26198073 sarà il c. di 297.

Esempio II. Si voglia il cubo del numero 5007.

Si prenda il cubo 125	di 5 ,
il triplo quadrato 000	di 5 mult. per 0,
il triplo quadrato 000	di 0 mult. per 5,
il cubo 000	di 0 ,
il triplo quadrato 000	di 50 mult. per 0,
il triplo quadrato 000	di 0 mult. per 50,
il cubo 000	di 0 ,
il triplo quadrato 52500000	di 500 m. per 7,
il triplo quadrato 73500	di 7 m. per 500,
e 'l cubo 343	di 7 ,

la somma 125525735343 sarà il cubo addi.

§. 138. *Cor. I.* Il cubo di un fratto pareggia un altro fratto , che ha per numeratore il cubo del numeratore del primo , e per denominatore il cubo del denominatore di esso.

§. 139. *Cor. II.* Il cubo di un numero intero unito ad un fratto si ottiene riducendo prima l'intero e 'l fratto (§. 60.) ad un sol fratto , e poi formando il cubo del fratto spurio , che ne risulta (138.).

§. 140. *Cor. III.* E poichè il quadrato di un fratto decimale o di un numero intero unito ad un fratto decimale contiene il doppio numero di cifre decimali , che si contengono nella radice (§. 103.); e moltiplicando questo qua-

drato per la radice si ottiene il cubo, questo dovrà contenere il triplo numero di cifre decimali, che sono nella radice: e per tal ragione se quel numero decimale si consideri come intero, e di esso se ne formi il cubo (137.); da questo cubo si dovranno separare con una virgola dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, che sieno il triplo di quelle, che si contengono nella radice.

§. 141. *Cor. IV.* Il cubo di un numero denominato si ottiene riducendo esso numero alle unità dell' infima specie, e poi prendendo il cubo del numero, che ne risulta.

Esempio. Si voglia formare il cubo del numero denominato $32^{\text{can.}} 3^{\text{pal.}} 5^{\text{on.}} 2^{\text{min.}}$.

Il numero proposto (Veggasi l' Esempl. del §. 132) ridotto a minuti addeguia $15567^{\text{min.}}$, di cui il quadrato è $242331489^{\text{min. qu.}}$, e l' cubo pareggia $3772374289263^{\text{min. c.}}$. Ma il cubo di un oncia (§. 122.) contiene 125 minuti cubici. Dunque in 3772374289263 minuti cubici vi si debbono contenere tante once cubiche, quante sono le unità del quoto, che risulta dividendo 3772374289263 per 125; cioè $30178994314^{\text{on. c.}}$ e $13^{\text{min. c.}}$. E quindi conteneudosi 1728 once cubiche in ciascun palmo cubico, in $30178994314^{\text{on. c.}}$ si debbono contenere $17464695^{\text{pal. c.}}$ e $1354^{\text{on. c.}}$. Ma in una canna cubica si contengono 512 palmi cubici. Dunque in $17464695^{\text{pal. c.}}$ si debbono contenere $34110^{\text{can. c.}}$ $375^{\text{pal. c.}}$. Il perchè dev' essere $34110^{\text{can. c.}}$ $375^{\text{pal. c.}}$ $1354^{\text{on. c.}}$ $13^{\text{min. c.}}$ il cubo di $32^{\text{can.}} 3^{\text{pal.}} 5^{\text{on.}} 2^{\text{min.}}$.

C A P. VII.

DELLE ESTRAZIONI DELLE RADICI QUADRATE
E CUBICHE.

§. 142. *Def. XXV.* L'estrarre una certa radice da un numero consiste nel determinare un altro numero, che siane la detta radice del proposto.

§. 143. *Scol.* E poichè non tutti i numeri sono quadrati e cubi di altri numeri (§§. 127 e 136.), la radice quadrata o la cubica non si otterrà sempre esattamente. Ma qualora quel numero non è un quadrato o cubo perfetto, convien prendere quella radice, che corrisponda al quadrato o al cubo, che è il più grande tra quei quadrati o cubi, che sono tra 'l zero e 'l numero proposto: ed una tal radice chiamasi *radice prossimamente minore del numero proposto*. Così p. es. essendo 64 il più grande tra i quadrati dei numeri intieri, che sono tra 'l zero e 'l 72, ed 8 la radice quadrata di 64; sarà 8 la radice quadrata prossimamente minore di 72.

PROP. XXXIV. PROBL.

§. 144. *Dato un numero, estrarne la radice quadrata.*

Sol. Sia dato il numero 2504201764; fa d'uopo estrarne la radice quadrata.

Il numero proposto, come quaggiù si vede, si divida per mezzo di virgole, e dalla destra verso la sinistra in periodi, di cui ciascuno costi di due cifre, all'infuori dell'ultimo, o del pri-

primo a sinistra, che può contenerne una sola. Sarà chiaro, che il numero 25 dinotato dal primo periodo a sinistra non debba essere minore del quadrato della prima cifra della radice (§. 128.). Onde se dal numero 25 se n' estragga la radice quadrata esatta 5, o la prossimamente minore, se il detto numero non sia un quadrato perfetto, dovrà essere 5 la prima cifra della radice. Intanto il quadrato 25 della radice 5 si sottragga dal primo periodo 25 del numero dato. Di poi a destra del residuo si pongano le altre due cifre 04 del seguente periodo. Sarà chiaro, che il numero, che ne risulta debba contenere (§. 128.) la somma del doppio prodotto della prima cifra della radice per la seconda e del quadrato della seconda, scritto in modo che le unità di quel doppio prodotto corrispondano sulle diecine di questo: e se tolga si la seconda cifra 4 del secondo periodo il numero, che ne risulta, dovrà contenere il doppio prodotto della prima cifra della radice moltiplicato per la seconda. Il perchè se questo numero si divida per 10 doppio di 5, e'l quoto 0 si ponga non solo alla destra del 5 col quale fa 50, ma eziandio alla destra del 10 col quale fa 100; questo numero 100 conterrà il doppio 10 della prima cifra della radice e la seconda cifra 0 della stessa radice. E quindi il doppio prodotto della prima cifra della radice per la seconda e 'l quadrato della seconda disposti in modo che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo e sommati insieme daranno lo stesso numero, che si ha moltiplicando 0 per 100, o sia 0. Onde se dal primo residuo col secondo periodo 04 si tolga il prodotto 0 poc' anzi ottenuto, si avrà 4 per residuo.

In oltre, al residuo 4 si pongano a destra le altre due cifre 20 del terzo periodo. Il numero 420, che ne risulta, dovrà contenere la somma del doppio prodotto del numero 50 dinotato dalle prime due cifre della radice per la terza e del quadrato della terza scritto in modo, che le diecine di esso corrispondano sotto le unità di quel doppio prodotto (§. 128); e cancellando l'ultima cifra 0 del numero 420, ne risulterà 42; che dee contenere il doppio prodotto di 50 per la terza cifra della radice. Si prenda dunque 100 doppio di 50, e poi si divida 42 per 100. Il quoto 0 di tale divisione dovrà essere la terza cifra della radice. Il perchè se a destra del numero 100 si ponga 0, e poi si moltiplichi 1000 per 0; il prodotto 0, che si otterrà, sarà uguale al doppio prodotto di 500 per 0 ed al quadrato di 0 insieme presi. Onde se un tal prodotto si sottragga da 420, ed a destra del residuo 420 si pongano le altre due cifre 17 del quarto periodo; il numero 42017, che ne risulta, dovrà contenere il doppio prodotto di 500 per la quarta cifra della radice, e l'quadrato della stessa quarta cifra. E quindi cancellando l'ultima cifra 7 da 42017, ne risulterà 4201, che dovrà contenere il doppio prodotto di 500 per la quarta cifra della radice. Si prenda intanto il doppio 1000 di 500, e per esso dividasi il numero 4201. Di poi il quoto 4 di tale divisione si scriva tanto alla destra del 500 col quale fa 5004, che alla destra di 1000 col quale fa 10004. Onde se moltiplicasi 10004 per 4, il prodotto 40016 sarà la somma del doppio prodotto di 5000 per 4 quarta cifra della radice e del quadrato di 4 scritti però in modo, che le

unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo. Il perchè se quel prodotto 40016 si sottragga da 42017, ed a destra del residuo si ponga il numero 64, che trovasi nell'ultimo periodo; il numero 200164, che ne risulta, dovrà contenere la somma del doppio prodotto di 5004 per la quinta cifra della radice, e del quadrato di questa quinta cifra scritto in modo che le diecine di esso corrispondano sotto le unità di quel doppio prodotto. E quindi, cancellando l'ultima cifra 4 da 200164, il numero 20016, che ne risulta, dovrà contenere il doppio prodotto di 5004 per la quinta cifra della radice. E perciò se dividasi 20016 per 10008, doppio di 5004, e'l quoto 2, che ne risulta, si ponga tanto alla destra del numero 5004, che alla destra di 10008, col quale fa 100082, e poi si moltiplichi 100082 per 2; il prodotto 200164, che ne risulta, dovrà pareggiare la somma del doppio prodotto di 5004 per 2, e del quadrato dell'ultima cifra 2 della radice scritto in modo che le diecine 0 di questo corrispondano sotto le unità di quello. Ma il prodotto, di 100082 per 2 non differisce dal precedente residuo 200164. Dunque il numero proposto 2504201764 è un quadrato perfetto. C. B. F.

Numero dato 25,04,20,17,64 Rad. qu. 50042
 Quadrato di 5 25 10004

	042017	100082
Pro. di 10004 per 4	40016	
	200164	
Pro. di 100082 per 2	200164	
Residuo	0	

Esempio I. Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 15792676.

Il numero proposto si divida in periodi, come quassù si è indicato. Di poi si estraiga la radice quadrata prossimamente minore 3 del numero 15 dinotato dal primo periodo a sinistra del numero proposto, e 'l quadrato 9 di 3 si sottragga da 15, e si noti sotto una linea il residuo 6 di questa sottrazione. In oltre, a destra del residuo 6 si pongano le due cifre del secondo periodo 79, e 'l numero 67 formato da quel residuo e dalla prima cifra del secondo periodo si divida pel doppio 6 della prima cifra 3 della radice. Il quoto 9 di questa divisione si ponga non solo a destra del 3 col quale fa 39, ma eziandio alla destra del 6 col quale fa 69. Intanto si moltiplichino 69 per 9, e 'l prodotto 621 si sottragga dal numero 679, e 'l residuo 58 si scriva sotto una linea. A destra di questo residuo 58 vi si pongano le due cifre del terzo periodo 26; onde ne risulta il numero 5826. Di poi si divida 582 pel doppio 78 del numero 39 dinotato dalle due prime cifre della radice, e 'l quoto 7 di tale divisione si ponga non solo alla destra di 78, ma pure alla destra di 39. In oltre, il numero 787 si moltiplichino per 7, e e 'l prodotto 5509, che si ottiene, si sottragga da 5826, ed a destra del residuo 317 si ponga il numero 76 dinotato dall'ultimo periodo del numero proposto. Finalmente, si prenda il doppio 794 di 397, e per esso dividasi il numero 3177. Il quoto 4, che si ottiene, sarà l'ultima cifra della radice. In fatti se quel quoto si ponga alla destra del numero 794 si avrà 7944, e moltiplicando 7944 per 4 si otterrà per prodot-

to 31776, che non differisce dal numero, che si è ottenuto ponendo a destra del precedente residuo 317 l'ultimo periodo 76 del numero dato. Ed ecco quaggiù esibito il calcolo per la estrazione della radice quadrata del proposto numero. Numero dato 15,79,26,76 Radice quadr. 3974

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 \hline
 679 \\
 621 \\
 \hline
 5826 \\
 5509 \\
 \hline
 31776 \\
 31776 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 69 \\
 787 \\
 7944
 \end{array}$$

Residuo 0

Esempio II. Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 7390382.

Il numero proposto si divida in periodi, come si è indicato nel precedente Problema, e si estraiga la radice quadrata prossimamente minore 2 dal numero 7 dinotato dal primo periodo a sinistra. Di poi il quadrato 4 di 2 si sottragga da 7, ed a destra del residuo 3 si ponga il numero 39 dinotato dal secondo periodo. Indi il numero 33 si divida pel doppio 4 della prima cifra della radice, ed il quoto 8 di tal divisione si ponga non solo alla destra della prima cifra 2 della radice, ma eziandio alla destra di 4 doppio di 2. Ma poichè moltiplicando 8 per 48 si ottiene per prodotto 384, che è maggiore di 339, converrà diminuire di 1 il quoto 8, che si è ottenuto dalla precedente divisione. Quindi in luogo di 8 si ponga 7 tanto alla destra di 2, che alla destra di 4: e poi si moltiplichino 47 per 7, e 'l prodotto 329 si sottrag-

ga da 339. A destra del residuo 10, che si ottiene, si ponga il numero 03 dinotato dal terzo periodo, e poi si divida 100 per 54 doppio del numero 27 dinotato dalle due prime cifre della radice, e si prosegua il resto dell'operazione, come quaggiù si vede espresso.

Numero dato	7,39,03,82	Radice quadr.	2718
	4		47
	339		541
	329		5428
	1003		
	541		
	40282		
	43424		
<i>Residuo</i>	2858		

E di quì si scorge, che il numero dato non è un quadrato perfetto.

§. 145. *Cor. I.* E poichè la radice quadrata di un numero, che contiene intieri e decimali, o solo decimali, deve avere (§. 131.) un numero di cifre decimali metà di quelle, che sono nel quadrato; l'è chiaro, che per estrarre la radice quadrata da un numero, che contenga intieri e decimali, o solo decimali, convien prima ridurre le cifre decimali, se nol sieno, a numero pari, col porre a destra di esse un zero, e poi estrarre la radice quadrata dal numero, che ne risulta, considerando le cifre decimali come se fossero intieri: e finalmente dalla radice trovata converrà separarne tante cifre decimali, che sieno in numero metà di quelle, che si contengono nel quadrato, compresovi anche lo zero, se sia stato posto a destra delle cifre decimali del numero dato.

Esempio. Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 172,08356, che contiene cinque cifre decimali.

Essendo il numero proposto lo stesso dell'altro 172,083560, l'è chiaro, che se da questo numero si tolga la virgola, che è in mezzo, e dall'altro 172083560, che ne risulta, si estrarra la radice quadrata 13118; questa divisa per 1000 sarà la radice quadrata del numero 172083560 diviso pel quadrato di 1000 (§. 129.), ovvero di 172,083560. Dunque la radice quadrata di 172,08356 adegua 13,118.

§. 146. *Cor. II.* Essendo il numero 172,08356 lo stesso dell'altro, che risulta ponendo a destra di esso un qualsivoglia numero di zeri; la radice quadrata del numero 172,08356 dev'essere la stessa di quella, che si ha ponendo a destra dello stesso numero tanti zeri, che colle cifre decimali facciano un numero pari. Ma in tal caso le cifre decimali sono maggiori di numero. Dunque dalla radice, che si ottiene, converrà separare un maggior numero di cifre decimali: e questa radice sarà più esatta di quella, che si ha non ponendo gli zeri a destra del numero dato.

Esempio. Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 172,08356 coll'approssimazione fino alle centomillesime.

E poichè l'approssimazione della radice da trovarsi si dee spingere fino alle centomillesime, cioè fino alla quinta cifra decimale, nel quadrato vi dovranno (§. 131.) essere dieci cifre decimali. Ma nel numero proposto ve ne sono cinque. Dunque le altre cinque si dovranno supplire con altrettanti zeri. E quindi converrà

estrarre la radice quadrata da 172,0835600000.

Si consideri ora il numero 172,0835600000 come se fosse intero, e da esso se n' estraiga la radice quadrata 1311806, e da tal radice se ne separino cinque cifre decimali. Sarà 13,11806 la radice quadrata di 172,08356 coll' approssimazione fino alle centomillesime. Che se a destra del numero dato vi si fossero posti altri zeri, si sarebbe ottenuta la radice quadrata dal numero dato con maggiore approssimazione.

§. 147. *Cor. III.* Il perchè se a destra di un numero intero, che non sia un quadrato perfetto, si ponga una virgola, e poi si scriva un numero pari di zeri; dal numero, che ne risulta, si potrà estrarre la radice quadrata considerandolo come un intero unito ad un decimale: ed in tal caso la radice sarà più esatta di quella, che si otterrebbe non ponendo gli zeri a destra del numero dato.

Esempio. Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 572 coll' approssimazione fino alle diecimillesime.

E poichè l' approssimazione della radice si dee spingere fino alle parti diecimillesime, cioè fino alla quarta cifra decimale; P'è chiaro, che nel quadrato vi debbono essere otto cifre decimali. Ma queste mancano intieramente. Dunque conviene scrivere una virgola ed otto zeri a destra del numero 572, e poi estrarre la radice quadrata (§. 146.) 23,9165 dal numero 572,00000000.

§. 148. *Cor. IV.* La radice quadrata di un fratto semplice può ottenersi o riducendo prima esso fratto ad un decimale, che abbia un numero pari di cifre decimali (§. 104.), e poi estraendo la radice quadrata da tal fratto deci-

male, o pure estraendo le radici quadrate dal numeratore e dal denominatore di esso fratto semplice, e 'l fratto, che avrà per numeratore la prima di tali radici e per denominatore la seconda, sarà la radice quadrata del proposto (§. 129).

§. 149. *Cor. V.* E se debbasi estrarre la radice quadrata da un numero intiero unito ad un fratto semplice, convien prima ridurre tal fratto semplice ad un fratto decimale, che abbia un numero pari di cifre decimali, e poi da quel numero intiero aggiunto a tal fratto decimale dovrà estrarsene la radice quadrata, come quasi si è indicato (§. 146.).

§. 150. *Cor. VI.* Finalmente se vogliasi estrarre la radice quadrata da un numero denominato, che dinoti un quadrato, si dovrà esso esibire per le unità quadrate dell' infima specie, e poi dal numero, che si ottiene, converrà estrarne la radice quadrata.

Esempio. Si voglia estrarre la radice quadrata da $187^{\text{can. qu.}}$ $47^{\text{pal. qu.}}$ $117^{\text{on. qu.}}$ $4^{\text{min. qu.}}$.

E poichè il quadrato di una canna (§. 117.) contiene 64 palmi quadrati, in $187^{\text{can. qu.}}$ si dovranno contenere 187 volte 64 palmi quadrati; cioè 11968 palmi quadrati. Il perchè la somma di $187^{\text{can. qu.}}$ e di $47^{\text{pal. qu.}}$ dovrà pareggiare la somma di $11968^{\text{pal. qu.}}$ e di $47^{\text{pal. qu.}}$; cioè dovrà pareggiare $12015^{\text{pal. qu.}}$. Ma il quadrato di un palmo contiene 144 once quadrate. Dunque se moltiplicasi 12015 per 144, il prodotto 1730160 dovrà dinotare il numero delle once quadrate, che si contengono in $187^{\text{can. qu.}}$ e $47^{\text{pal. qu.}}$. Onde se a quel prodotto vi si aggiunga 117, la somma 1730277, che ne risulta, dovrà dinotare il numero delle once quadrate, che si conten-

gono in 18⁷_{can. qu.} 47^{pal.} 117^{on. qu.}. Ma il quadrato di un'oncia contiene 25 volte quello di un minuto. Dunque se il numero 1730277 si moltiplichi per 25, ed al prodotto 43256925 si aggiungano 4 minuti quadrati, la somma 43256929, che si ottiene, ne dovrà dinotare il numero dei minuti quadrati, che si contengono nel proposto numero denominato: e la radice quadrata 6577 di 43256929 dinoterà i minuti⁶ lineari, che sono nella radice quadrata dello stesso numero dato. Ma ogni oncia (§. 109.) contiene 5 minuti, ogni palmo 12 onces, ed ogni canna 8 palmi. Dunque 6577 minuti equivalgono a 13^{can.} 5^{pal.} 7^{on.} 2^{min.}, che dev'essere la radice quadrata del proposto numero.

PROP. XXXV. PROBL.

§. 151. *Dato un numero intiero, estrarne la radice cubica.*

Sol. Sia dato il numero 26198073; fa d'uopo estrarne la radice cubica.

Il numero proposto, come quaggiù si vede, si divida per mezzo di virgole dalla destra verso la sinistra in periodi; ciascuno dei quali costi di tre cifre, all'infuori dell'ultimo o del primo a sinistra, che può contenerne due ed anche una. Sarà chiaro, che il numero 26 dinotato dal primo periodo a sinistra debba contenere il cubo della prima cifra della radice. Onde se dal numero 26 se n'estragga la radice cubica esatta o prossimamente minore 2, se esso non sia un cubo perfetto, dovrà essere 2 la prima cifra della radice (§. 137.). Intanto il cubo 8 di 2, si sottragga dal primo periodo

26, ed a destra del residuo 18 vi si ponga il numero 198 dinotato dal secondo periodo. Sarà chiaro, che il numero 18198, che ne risulta, non debba essere minore della somma del triplo quadrato della prima cifra 2 della radice moltiplicato per la seconda cifra, del triplo quadrato della seconda cifra moltiplicato per la prima, e del cubo della seconda cifra (137.), tal che questi numeri nel sommarli sieno in modo disposti, che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo, e le unità del secondo sulle diecine del terzo. Onde se dal numero 18198 si cancellino le due ultime cifre verso la destra, il numero 181, che ne risulta dovrà contenere il triplo quadrato della prima cifra 2 della radice moltiplicato per la seconda. Il perchè se dividasì 181 per 12, che è il triplo quadrato di 2; il quoto 9 sarà la seconda cifra della radice, se il cubo di 29 non risulti maggiore del numero 26198 dinotato dai due primi periodi del numero dato: altrimenti si dovrà diminuire di 1 la seconda cifra della radice. Ma il cubo di 29 è 24389, che è minore di 26198. Dunque se dal numero 26198 se ne sottragga l'altro 24389; e a destra del residuo 1809 si ponga 073, che è il terzo periodo del numero dato; il numero 1809073, che ne risulta, dovrà contenere la somma del triplo quadrato di 29 moltiplicato per la terza cifra della radice, del triplo quadrato della terza cifra moltiplicato per 29, e del cubo della terza cifra, tal che questi numeri nel sommarli sieno in modo disposti, che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo, e le unità del secondo sulle diecine del terzo. Onde se dal numero 1809073 si

separino le due ultime cifre verso la destra, ne dovrà emergere 18090, che conterrà il triplo quadrato di 29 moltiplicato per la terza cifra della radice. E quindi se dividasì 18090 per 2523, che è il triplo quadrato di 29; il quoto 7 sarà la terza cifra della radice C. B. F.

Numero dato	26,198 073	Rad. cub..	297
cubo di 2	8	3.plo qua. di 2..	12
	18198	3.plo qua. di 29..	2523
cubo di 29	24389		
ecc. dei due pr. per. sul			
cu. di 29 e 3° peri.	1809073		
cubo di 297	26198073		
Residuo	0		

Esempio. Si voglia estrarre la radice cubica dal numero 357423402574.

Il numero proposto si divida in periodi, come quassù si è indicato, e poi si estraiga la radice cubica 7 dal numero 357 dinotato dal primo periodo a sinistra, e 'l cubo 343 di 7 si sottragga da esso primo periodo. In oltre, a destra del residuo 14 si ponga la prima cifra 4 del numero dinotato dal secondo periodo, e 'l numero 144, che ne risulta, si divida per 147 triplo di 49 quadrato di 7; il quoto si dovrà scrivere alla destra della prima cifra 7 della radice. Ma 147 è maggiore di 144. Dunque dovrà essere 0 la seconda cifra della radice, e 'l numero dinotato dalle due prime cifre della radice sarà 70, di cui il cubo dovrà pareggiare 343000, che tolto da 357423 numero dinotato dai due primi periodi, darà per residuo 14423. Onde se a tal residuo vi si ponga la prima cifra 4 del terzo periodo, e 'l numero 144234, che ne risulta, si divida per 14700; il quoto 9 di

tal divisione dovrà dinotare la terza cifra della radice. Il perchè se il cubo 356400829 di 709 si sottragga dal numero 357423402 dinotato dai tre primi periodi, ed al residuo 1022573 si ponga verso la destra il numero 5 prima cifra dell'ultimo periodo; il numero 10225735, che ne risulta, diviso per 1508043 triplo quadrato di 709, darà per quoziente 6, che sarà l'ultima cifra della radice, per esserne il cubo di 7096 non maggiore del numero dato, come quaggiù si vede.

Numero proposto	357,423,402,574	Rad. cubica	7096
cubo di 7	343		14700
	144234		1508043
cubo di 709	356400829		
	10225735		
cubo di 7096	357306420736		
Residuo	116981838		

§. 152. *Cor. I.* E poichè la radice cubica di un numero, che contiene intieri e decimali, deve avere tante cifre decimali, che sono in numero la terza parte di quelle di esso numero (§. 140.); l'è chiaro, che per estrarre la radice da un numero, che contenga intieri e decimali o solo decimali, sarà mestieri, che le cifre decimali si riducano, se nol sono, per mezzo di uno o due zeri, che si pongano a destra di esso numero, a tal numero, che sia divisibile per 3. Di poi converrà estrarre la radice cubica dal numero, che ne risulta, considerando le cifre decimali come se fossero intiere. E finalmente dalla radice trovata se ne dovranno separare tante cifre decimali, che sieno in numero la terza parte di quelle, che vi erano nel cubo compresovi lo zero o i due zeri, se furono posti a destra del numero dato.

Esempio. Si voglia estrarre la radice cubica dal numero 35,7452034.

E poichè nel numero proposto vi sono sette cifre decimali, conviene scrivere a destra di esso due zeri, come quaggiù si vede, affinchè il numero delle cifre decimali si riduca a 9, che è divisibile per 3. Onde dovrà risultarne l'altro numero 35,745203400, che ha lo stesso valore del proposto. Intanto da questo numero se ne tolga la virgola, e dal numero intero 35745203400 si estrarra la radice cubica (§. 151.) 3294, e ne dovrà risultare 3867216 per residuo. Or essendo il cubo di 3294 minore di 35745203400 per 3872216, sarà il cubo di 3294 diviso per 1000 minore di 35745203400 diviso pel cubo di 1000 per 3867216 diviso pel cubo di 1000. Adunque la radice cubica prossimamente minore della vera del numero proposto dev' essere 3,294.

Numero dato	35,745,203,400	Radice cubica..3.294
cubo di 3	27	3.plo quad.di 3..27
	87	3.ploquad.di 32..3072
cubo di 32	32768	3.ploquad.di 329. 324723
	29772	
cubo di 329	35611289	
	1339144	
cubo di 3294	35741336184	
Residuo	3867216	

§. 153. *Cor. II.* Essendo il numero 35,7452034 lo stesso dell' altro, che risulta ponendo (§. 99) a destra di esso un qualsivoglia numero di zeri; l'è chiaro, che la radice cubica di 35,7452034 debba essere la stessa di quella, che si ottiene ponendo a destra dello stesso numero tanti zeri, che colle cifre decimali sieno in numero divisi-

bile per 3. Dunque dalla radice, che si ottiene converrà separare un maggior numero di cifre decimali: e questa radice poi sarà più esatta di quella, che si avrebbe non ponendo i zeri a destra del numero dato.

Esempio. Estrarre la radice cubica dal numero 35,7452034 coll' approssimazione fino alle diecimillesime.

E poichè l' approssimazione della radice da trovarsi si dee spingere fino alle diecimillesime, cioè fino alla quarta cifra decimale, nel cubo vi dovranno essere (§. 140.) dodici cifre decimali. Ma nel numero proposto ve ne sono sette. Dunque le altre cinque si dovranno supplire con altrettanti zeri. E quindi converrà estrarre la radice cubica da 35,745203400000.

Si consideri ora il numero 35,745203400000 come se fosse intero, e da esso se n' estraiga la radice cubica 32941. Sarà 32941 diviso per 10000 la radice cubica di 35745203400000 diviso pel cubo di 10000. Ma il numero 32941 diviso per 10000 adegua 3,2941 e 35745203400000 diviso pel cubo di 10000 pareggia 35,745203400000 ovvero 35,7452034. Dunque la radice cubica del numero proposto adegua 3,2941, coll' approssimazione fino alla quarta cifra decimale. Che se poi a destra del numero dato oltre dei cinque zeri già scritti vi si pongono altri ternarii di zeri, si potrà ottenere di esso numero la radice cubica con maggiore approssimazione.

§. 154. *Cor. III.* Il perchè se a destra di un numero intero, che non sia cubo esatto, si ponga una virgola, e poi si scriva un qualsivoglia numero di ternarii di zeri; dal numero, che ne risulta, se ne potrà estrarre la

radice cubica considerandolo (§. 153.) come un numero intiero unito ad un fratto decimale, ed in tal caso la radice sarà più esatta di quella, che si otterrebbe senza porre quei zeri a destra del numero dato.

Esempio. Si voglia estrarre la radice da 59642 coll' approssimazione fino alle centesime.

E poichè l' approssimazione della radice cubica domandata si dee spingere fino alle centesime, cioè fino alla seconda cifra decimale, nel cubo vi debbono essere sei cifre decimali (§. 140). Ma queste mancano nel numero dato. Dunque se a destra dello stesso numero si scriva una virgola, e poi si pongano sei zeri, la radice cubica (§. 153.) 39,07 dell' intiero e decimale 59642,000000 sarà quella, che si domanda.

§. 155. *Cor. IV.* La radice cubica di un fratto semplice può ottenersi o riducendo prima esso fratto ad un decimale, che contenga un completo numero di ternarii di cifre decimali, e poi estraendo la radice cubica da tal fratto decimale (§. 153.), o pure estraendo le radici cubiche dal numeratore e dal denominatore del fratto semplice; il fratto, che avrà per numeratore la prima di quelle radici, e per denominatore la seconda, sarà la radice cubica del fratto semplice dato.

§. 156. *Cor. V.* E se debbasi estrarre la radice cubica da un numero intiero unito ad un fratto semplice, convien prima ridurre il fratto semplice ad un fratto decimale, che contenga un completo numero di ternarii di cifre decimali, e poi da quel numero intiero unito a tal fratto decimale dovrà estrarsene la radice cubica, come quassù si è indicato (§. 153.).

§. 157. *Cor. VI.* Finalmente se vogliasi estrarre la radice cubica da un numero denominato, che dinoti un cubo, si dovrà esso esibire per le unità cubiche dell'infima specie, e di poi dal numero, che si ottiene, dovrà estrarsene la radice cubica.

Esempio. Estrarre la radice cubica dal numero denominato $34201^{\text{can.c.}} 90^{\text{pal.c.}} 458^{\text{on.c.}} 13^{\text{m.c.}}$

E poichè il cubo di una canna (§. 122.) contiene 512 palmi cubici, in 34201 canne cubiche si dovranno contenere 34201 volte $512^{\text{pal.c.}}$, cioè 17510912 . Il perchè la somma di $34201^{\text{can.c.}}$ e di $90^{\text{pal.c.}}$ dovrà pareggiare la somma di $17510912^{\text{pal.c.}}$ e di $90^{\text{pal.c.}}$; cioè dovrà pareggiare $17511002^{\text{pal.c.}}$. Ma il cubo di un palmo contiene 1728 once cubiche. Dunque se moltiplicasi 17511002 per 1728, il prodotto 30259011456 dovrà dinotare il numero delle once cubiche, che si contengono in $34201^{\text{can.c.}} 90^{\text{pal.c.}}$. Onde se a quel prodotto vi si aggiungano $458^{\text{on.c.}}$, la somma 30259011914 , che ne risulta, dovrà dinotare il numero delle once cubiche, che si contengono in $34201^{\text{can.c.}} 90^{\text{pal.c.}} 458^{\text{on.c.}}$. Ma il cubo di un oncia contiene 125 once cubiche. Dunque se il numero 30259011914 si moltiplichi per 125, ed al prodotto 3782376489250 si aggiungano 13 minuti cubici; la somma, che si ottiene, dovrà dinotare il numero dei minuti cubici, che si contengono nel proposto numero denominato, e la radice cubica 15580 di 3782376489263 dinoterà i minuti lineari, che sono nella radice dello stesso numero dato. Ma ogni oncia (§. 109.) contiene 5 minuti, ogni palmo 12 once, ed ogni canna 8 palmi. Dunque in 15580 minuti vi si contengono $32^{\text{can.}}$ $3^{\text{pal.}}$ $8^{\text{on.}}$ $0^{\text{min.}}$.

C A P. VIII.

DELLE RAGIONI E PROPORZIONI GEOMETRICHE.

§. 158. *Def. XXVI.* Due grandezze diconsi *omogenee o dello stesso genere*, se una di una di esse presa un certo numero di volte possa uguagliare o superare l'altra.

§. 159. *Def. XXVII.* Due grandezze si dicono *eterogenee o di diverso genere*, se una di esse presa un qualunque numero di volte non possa mai uguagliare o superare l'altra.

§. 160. *Def. XXVIII.* La *ragione* o il *rapporto* di due grandezze è il paragone, che si fa di una di esse all'altra. Onde per poter paragonare quelle grandezze convien, che esse sieno omogenee (§. 158.).

§. 161. *Scol. I.* Il paragone di una grandezza ad un'altra può istituirsi in due differenti maniere; cioè o coll'esaminare quante volte la prima di dette grandezze contiene la seconda, o col determinare di quanto la prima di esse supera o è minore dell'altra. Nel primo caso la ragione dicesi *geometrica*, e nel secondo *aritmetica*.

Esempio. Se paragonasi la lunghezza di 12 canne a quella di 4 canne, e si determini il numero 3, che dinoti quante volte la prima di dette grandezze contenga la seconda; un tal paragone dicesi *ragione o rapporto geometrico*.

Che se poi il numero 13 si paragoni all'altro 8 determinando l'eccesso 5 del primo di essi sul secondo; un tal paragone dovrà chiamarsi *ragione o rapporto aritmetico*.

§. 162. *Scol. II.* Le ragioni geometriche

vengono dette semplicemente *ragioni*; e perciò in appresso col nome di *ragione* dovrà sempre intendersi la ragione geometrica.

§. 163. *Def. XXIX.* Le grandezze, che si paragonano in una ragione, diconsi *termini di essa*; ed in particolare la prima di quelle grandezze chiamasi *antecedente*, e la seconda *conseguente* della ragione.

§. 164. *Scol.* La ragione di due grandezze suole indicarsi ponendo tra l' antecedente e l' conseguente due punti; tal che per dinotare la ragione di 7 canne a 9 canne, si scrive $7^{\text{can.}} : 9^{\text{can.}}$, e si pronuncia » 7 canne sta a 9 canne ».

§. 165. *Def. XXX.* Il fratto, che ha per numeratore l' antecedente e per denominatore il conseguente di una ragione, chiamasi *quoziente*, *quantità di ragione*, o *esponente di ragione* dell' antecedente al conseguente.

§. 166. *Cor.* Dunque la quantità di ragione è un numero astratto, che dinota quante volte il conseguente della ragione si contiene nell' antecedente.

§. 167. *Def. XXXI.* Due o più ragioni sono *uguali*, se uguali sieno le loro quantità di ragioni.

Esempio. La quantità di ragione di 7 canne ad 11 canne adegua il fratto (§. 165.) $\frac{7}{11}$, cui

è pure uguale la frazione $\frac{63}{99}$, che dinota la quantità di ragione di 63 ducati a 99 ducati. Dunque sono uguali le ragioni di 7 canne ad 11 canne, e di 63 ducati a 99 ducati.

§. 168. *Cor.* Se due ragioni sieno tra se uguali, risulteranno anche uguali quelle altre ra-

gioni, che si ottengono paragonando gli antecedenti ed i conseguenti delle prime ai rispettivi conseguenti di esse. Così per es. essendo uguali le ragioni di $7^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}}$, e di $63^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$, dovranno essere pure uguali le ragioni di $18^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}}$, e di $162^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$. Poichè essendo $7^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}} :: 63^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$, dev'essere

$$\frac{7}{11} = \frac{63}{99}, \text{ ed } 1 + \frac{7}{11} = 1 + \frac{63}{99}.$$

Ma $1 + \frac{7}{11}$ adegua (§. 60.) $\frac{18}{11}$, ed è $1 + \frac{63}{99} = \frac{162}{99}$.

Dunque dev'essere $\frac{18}{11} = \frac{162}{99}$. Il perchè dovrà stare
 $18^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}} :: 162^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$.

§. 169. *Def. XXXII.* Una ragione dicesi *inversa* di un'altra, se la quantità di ragione della prima pareggi il quoto, che si ottiene dividendo il conseguente della seconda per l'antecedente di essa.

Esempio. Così la ragione di 5 a 9 dicesi *inversa* dell'altra di 27 a 15; poichè la quantità di ragione $\frac{5}{9}$ della prima pareggia il quoto $\frac{15}{27}$ del conseguente 15 della seconda per l'antecedente 27 di essa.

§. 170. *Cor.* Adunque se una ragione sia inversa di un'altra, prendendo nella seconda il conseguente per antecedente e l'antecedente per conseguente, ne risulterà una ragione uguale alla prima.

§. 171. *Def. XXXIII.* Una ragione dirassi *composta* da più altre, se l'esponente di essa adegui il prodotto degli esponenti di quelle altre ragioni.

Esempio. La ragione di $44 : 273$ dicesi composta dalle ragioni di $3 : 7$, di $4 : 9$, e di $11 : 13$; poichè l'esponente $\frac{44}{273}$ della prima adegua il prodotto $\frac{132}{819}$ degli esponenti $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, ed $\frac{11}{13}$ delle altre ragioni.

§. 172. *Cor. I.* Dunque l'esponente di una ragione, che è composta da più altre, adegua il quoziente, che si ottiene dividendo il prodotto degli antecedenti di tutte le ragioni componenti pel prodotto dei conseguenti di esse.

§. 173. *Cor. II.* Il perchè se vi sieno più ragioni, e 'l conseguente della prima adegui l'antecedente della seconda, il conseguente della seconda pareggi l'antecedente della terza, il conseguente della terza sia uguale all'antecedente della quarta, ec.; la ragione, che si comporrà da esse dovrà essere uguale a quella, che ha l'antecedente della prima ragione al conseguente dell'ultima. In fatti essendo le ragioni di $3 : 7$, di $7 : 11$, di $11 : 17$, di $17 : 23$, la composta di queste avendo per esponente il fratto $\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17}{7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23}$, che adegua $\frac{3}{23}$, sarà uguale alla ragione dell'antecedente 3 della prima ragione al conseguente 23 dell'ultima.

§. 174. *Cor. III.* E quindi se le ragioni di $3 : 7$, di $7 : 11$, di $11 : 17$, e di $17 : 23$ sieno rispettivamente uguali ad altre; la ragione di $3 : 23$ dovrà essere uguale a quella, che si comporrà da queste seconde ragioni.

§. 175. *Def. XXXIV.* L'uguaglianza di due ragioni chiamasi *analogia*, o *proporzione geometrica*.

§. 176. *Scol.* Tale uguaglianza suole indicarsi o ponendo tra le due ragioni il segno $=$ per dinotare, che sono uguali tra loro le due quantità di ragioni, o scrivendo quattro punti :: tra le medesime ragioni: e sì l'uno che l'altro segno si pronuncia *come*. Così p. es., essendo uguali le ragioni di 7 canne ad 11 canne e di 63 ducati a 99 ducati, la proporzione, che risulta dall'uguaglianza di dette ragioni, si scrive nel modo seguente $7^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}} = 63^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$, o pure nell'altro $7^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}} :: 63^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$: e sì nell'una, che nell'altra maniera la proporzione si pronuncia così « 7 canne sta ad 11 canne come 63 ducati a 99 ducati ».

§. 177. *Def. XXXV.* Una proporzione dicesi *continua*, se il conseguente di una delle sue ragioni adegui l'antecedente dell'altra, ed in ogni altro caso la proporzione si dirà *discreta*.

§. 178. *Cor. I.* In ogni proporzione continua vi si contengono tre termini, di cui uno fa da conseguente in una ragione, e da antecedente nell'altra, e la proporzione suole scriversi in modo che i termini uguali formino il secondo e l' terzo termine di essa.

§. 179. *Cor. II.* Da quanto finora si è stabilito (§§. 165, e 167) rilevasi, che alla ragione di due grandezze può sostituirsi quella di due altre tra loro omogenee, ma di diverso genere delle prime, purchè la quantità di ragione della seconde adegui quella delle prime. Così, per esempio, alla ragione di 9 ducati a 13 ducati può sostituirsi l'altra di 9 canne a 13 canne, o in generale di due grandezze, che rapportate ad una medesima unità sieno espresse dagli stessi numeri, da cui ne son dinotate le prime.

§. 180. *Cor. III.* In oltre, poichè un fratto qualunque adegua ciascuno di quei fratti, che risultano moltiplicando o dividendo il numeratore e'l denominatore di esso per un qualunque numero (§§. 58, e 59.); l'è chiaro, che se ambedue i termini di una ragione si moltiplichino o si dividano per un medesimo numero, i prodotti o i quozienti, che ne risultano dovranno serbare tra loro la medesima ragione. Così, per esempio, se i termini della ragione di 5 : 9 si moltiplichino per 7, ne risulterà la ragione di 35 : 63 uguale a quella di 5 : 9 (§. 167.). E se quei termini si dividano ambedue per 7 si troverà pure la ragione di 5 : 9 uguale all'altra di $\frac{5}{7} : \frac{9}{7}$. In fatti in questo ultimo caso la quantità di ragione di $\frac{5}{7} : \frac{9}{7}$ adegua $\frac{35}{63}$, quoziente, che si ottiene dividendo $\frac{5}{7}$ per $\frac{9}{7}$. Ma $\frac{35}{63}$ è lo stesso che $\frac{5}{9}$ (§. 59.). Dunque la ragione di 5 : 9 pareggia l'altra di $\frac{5}{7} : \frac{9}{7}$ (§. 167.).

PROP. XXXVI. TEOR.

§. 181. *In ogni proporzione geometrica il prodotto dei termini estremi è uguale al prodotto dei termini di mezzo.*

Dim. Sia la proporzione geometrica 5 : 13 :: 35 : 91; dico, che debba essere $5 \times 91 = 13 \times 35$.

Poichè sono uguali le ragioni di 5 : 13 e di 35 : 91, dovrà essere $\frac{5}{13} = \frac{35}{91}$, e riducendo que-

sti fratti al medesimo denominatore , ne dovrà risultare $\frac{5 \times 91}{1183} = \frac{13 \times 35}{1183}$. Ma qualora due fratti so-

no uguali ed hanno uguali denominatori , i numeratori di essi devono essere parimente uguali. Dunque dev' essere $5 \times 91 = 13 \times 35$. Vale a dire, che nella proporzione geometrica $5 : 13 :: 35 : 91$ il prodotto dei termini estremi 5 e 91 adegua quello di 13 e 35 , che sono i termini di mezzo. Lo stesso ragionamento dovrà farsi per qualunque altra proporzione geometrica. C. B. D.

§. 182. *Cor.* E quindi se i due termini di mezzo di una proporzione geometrica sieno uguali , nel qual caso la proporzione sarà continua , dovrà essere il quadrato del secondo termine uguale al prodotto dei termini estremi.

PROP. XXXVII. TEOR.

§. 183. *Se quattro numeri sieno tali , che il prodotto del primo pel quarto adegui l'altro del secondo pel terzo , essi numeri dovranno formare una proporzione geometrica.*

Dim. Sieno i quattro numeri 7 , 25 , 91 , 325 , tali , che il prodotto del primo 7 pel quarto 325 pareggi quello del secondo 25 pel terzo 91 ; dico , che debba stare $7 : 25 :: 91 : 325$.

Poichè 7×325 adegua 25×91 , dividendo questi uguali prodotti per 325 si dovranno ottenere quozienti uguali ; onde sarà $7 = \frac{25 \times 91}{325}$, e dividendo di nuovo l'uno e l'altro quoziente per 25 si otterrà $\frac{7}{25} = \frac{91}{325}$. E quindi essendo uguali le quantità di ragioni di $7 : 25$, e di 91

: 325 , dee stare $7 : 25 :: 91 : 325$. Dunque se quattro numeri ec. C. B. D.

PROP. XXXVIII. TEOR.

§. 184. *In ogni proporzione geometrica il quarto termine adegua il prodotto dei due termini di mezzo diviso pel primo , ed uno dei termini di mezzo è uguale al prodotto dei termini estremi diviso per l' altro dei termini medii.*

Dim. Sia la proporzione geometrica $5 : 13 :: 35 : 91$; dovrà essere (§. 178.) $5 \times 91 = 13 \times 35$. Onde dividendo questi uguali prodotti per 5 ne risulterà il quarto termine 91 della proporzione uguale a $\frac{13 \times 35}{5}$, cioè al prodotto dei termini di mezzo 13 e 35 diviso per 5, ch'è il primo.

Che se poi quei prodotti uguali 5×91 e 13×35 si dividano ambedue per 13, ne dovrà risultare il secondo dei termini di mezzo 35 uguale a $\frac{5 \times 91}{13}$, cioè uguale al prodotto dei termini estremi diviso per l' altro dei termini di mezzo. Dunque ec. C. B. D.

§. 185. *Cor.* Il perchè in ogni proporzione geometrica continua il quadrato del secondo termine diviso pel primo adegua il terzo termine, e la radice quadrata del prodotto dei termini estremi pareggia il termine di mezzo.

C A P. XI.

DELLE REGOLE, CUI SI RIDUCONO I PROBLEMI
ARITMETICI.

§. 186. Essendo diverse le specie dei quesiti, che colle operazioni da farsi sui numeri si possono risolvere in aritmetica, diverse debbono essere parimente le regole per mezzo delle quali quelle quistioni possano essere risolte. Onde dovendo esporre tali regole cominceremo dalla più semplice di esse, da cui le altre si derivano in facil modo.

Della Regola del Tre diretta semplice.

§. 187. *Dif. XXXVI.* Qualora vien proposta una quistione, nella quale si rilevi, che di tre numeri dati due dinotino grandezze omogenee, e di questi il primo sia annesso al terzo e serbi al secondo la medesima ragione del terzo a quello che si domanda; la regola colla quale vien risolta una tal quistione dicesi *Regola del Tre diretta semplice.*

§. 188. *Cor.* Dalla rapportata definizione si rileva, che nelle quistioni relative alla *Regola del Tre diretta semplice* il numero, che si domanda, dovendo dinotare una grandezza omogenea a quella, che vien rappresentata dal terzo dei numeri dati, debba ottenersi moltiplicando il secondo di essi numeri pel terzo, e di poi dividendo un tal prodotto pel primo.

P R O B L E M A I.

§. 189. *Se per 23 canne di un certo panno si son pagati ducati $332\frac{1}{2}$, quanto si dovrà pagare per 9 canne dello stesso panno?*

Sol. In questo quesito i numeri, che ne dinotano grandezze omogenee sono 23 canne e 9 canne, di cui il primo è annesso all'altro $332\frac{1}{2}$, che ne dinota ducati, ed è chiaro, che 23 debba serbare a 9 la stessa ragione di ducati $332\frac{1}{2}$ al numero di ducati, che ne dinota il prezzo di 9 canne di panno. Adunque il quarto termine della proporzione dovrà ottenersi moltiplicando il secondo termine 9 pel terzo $332\frac{1}{2}$, e poi dividendo il prodotto $2992\frac{1}{2}$ pel primo termine 23. Il quoziente $130\text{duc.}\frac{5}{46}$ sarà il costo domandato.

P R O B L E M A II.

§. 190. *Essendo il giorno naturale di 24 ore, e l'ora di 60'; quante ore e minuti si conteranno nei $\frac{4}{7}$ di un giorno?*

Sol. Si faccia $1 : \frac{4}{7} :: 24$ ore al quarto, che sarà uguale a 13 ore e $\frac{5}{7}$ di ora. Ma sta 1 ora a $\frac{5}{7}$ di ora come il numero 60 dei mi-

nuti primi, che si contengono in un' ora, al numero $42\frac{6}{7}$ dei minuti primi, che si contengono in $\frac{5}{7}$ di ora. Dunque $\frac{4}{7}$ di giorno sono lo stesso che 13 ore 42 minuti primi e $\frac{6}{7}$ di minuto primo.

PROBLEMA III.

§. 191. *Se per 27^{can.} 3^{pal.} di un certo lavoro si son pagati ducati 52, quante canne e palmi dello stesso lavoro si potranno fare con 75 ducati?*

Sol. Poichè i numeri 52 e 75 sono omogenei, e 'l primo di essi 52 è annesso a 27^{can.} 3^{pal.}, cui dev' essere omogeneo quello, che si domanda; l'è chiaro, che essendo 52 ducati prezzo di 27^{can.} 3^{pal.} di lavoro minore di 75 ducati costo del numero delle canne di lavoro domandate, dovrà stare 52 a 75 nella stessa ragione di 27^{can.} 3^{pal.} al termine che si domanda. Ma 27^{can.} 3^{pal.} equivalgono a 219^{pal.}. Dunque dee stare $52 : 75 :: 219^{\text{pal.}}$ al numero di palmi di lavoro, che si possono fare per 75 ducati. Il perchè se moltiplicasi 75 per 219, e 'l prodotto 16425 si divida per 52, il quoto $315^{\text{pal.}} \frac{45}{52}$, ovvero 39^{can.} 3^{pal.} $\frac{45}{52}$ di palmo ne dinoterà la dimandata lunghezza di lavoro.

§. 192. Per 27^{lib.} 5^{on.} $\frac{1}{3}$ di un certo liquore si son pagati ducati 7 e grana 58 $\frac{1}{2}$, quanto si dovrà pagare per 19^{lib.} 5^{on.} $\frac{1}{5}$ dello stesso liquore?

Sol. Essendo 27^{lib.} 5^{on.} $\frac{1}{3} = \frac{988}{3}$ di oncia, 7^{duc.} 58^{gr.} $\frac{1}{2} = \frac{1517}{2}$ di grano, e 19^{lib.} 5^{on.} $\frac{1}{5} = \frac{1166}{5}$ di oncia, la quistione proposta può enunciarsi nel modo che siegue « Per $\frac{988}{3}$ di oncia di un certo liquore si son pagate $\frac{1517}{2}$ di grano, quanto si dovrà pagare per $\frac{1166}{5}$ di oncia dello stesso liquore? » Di questa quistione sono omogenei i due numeri $\frac{988}{3}$ e $\frac{1166}{5}$, di cui il primo è annesso all' altro $\frac{1517}{2}$, che in parti di grano ne dinota il prezzo della prima quantità di liquore, ed è chiaro, che il termine domandato debba essere maggiore, o minore di $\frac{1517}{2}$ secondo che la seconda quantità di liquore è maggiore o pur minore della prima. Dunque la proporzione da stabilirsi è la seguente

$$\frac{988}{3} : \frac{1166}{5} :: \frac{1517}{2} \text{ al quarto.}$$

Il perchè se moltiplicasi $\frac{1166}{5}$ per $\frac{1517}{2}$, e 'l prodotto $\frac{1768822}{10}$ si divida per $\frac{988}{3}$, il quoziente $537\frac{906}{9880}$, o sia $537\frac{453}{4940}$ ne dinoterà in grana e frazioni di grano il prezzo della seconda quantità di liquore.

Della Regola del Tre composta diretta

§. 193. *Def. XXXVII. La Regola del Tre composta diretta* è quella per mezzo della quale si risolvono le quistioni, ove oltre dei termini della *Regola del Tre diretta semplice* ve ne sono o due altri, o quattro, ec. i quali essendo a due a due annessi al primo e secondo dei termini principali, sono tali che moltiplicando i loro prodotti rispettivamente per quei medesimi due primi termini ne fanno risultare due numeri, che col terzo di quei tre primi riducono la quistione proposta alla *Regola del Tre diretta semplice*.

§. 194. *Scol.* Dalla quistione, che quaggiù vien proposta, ne sarà chiarita la precedente definizione.

P R O B L E M A

§. 195. *Un capitale di ducati 5240 ducati ha fruttato per lo spazio di 17 mesi ducati 340. Si vuol sapere quanto dovrà rendere un capitale di ducati 7360 impiegato per 13 mesi alla medesima ragione.*

Sol. In questa quistione oltre dei termini 5240

ducato e 7360 ducati, che ne dinotano i capitali impiegati, ed a 340 ducati rendita corrispondente al primo capitale, vi son pure i tempi 17 mesi e 13 mesi, nei quali sono stati rispettivamente tenuti impiegati i due capitali. Or se quei due capitali fossero restati ambedue impiegati per lo spazio di diciassette mesi, la rendita corrispondente al secondo capitale avrebbe dovuto ottenersi dallaseguente proporzione; cioè

$$5240 : 7360 :: 340^{\text{duc.}} \text{ al quarto,}$$

che ne sarebbe stato dinotato da $\frac{7360 \times 340^{\text{duc.}}}{5240}$. Ma

poichè il secondo capitale fu tenuto impiegato per 13 mesi, la rendita di esso dovrà essere minore di $\frac{7360 \times 340^{\text{duc.}}}{5240}$, e dovrà stare 17:13:: $\frac{7360 \times 340^{\text{duc.}}}{5240}$

alla rendita, che ha dato in 13 mesi il capitale di 7360^{duc.} impiegato alla stessa ragione dell'altro di 5240^{duc.} Il perchè tal rendita dovrà essere $\frac{13 \times 7360 \times 340^{\text{duc.}}}{17 \times 5240}$.

Ma se i termini dati si dispongano nella maniera quaggiù esposta, e poi si dica » In tempi uguali col crescere il capitale si aumenta la rendita; dunque la ragione dei capitali è diretta di quella delle rendite. In oltre, se i capitali fossero uguali, le rendite sarebbero nella ragione dei tempi, in che essi si tennero impiegati; dunque la ragione dei tempi è pure diretta dell'altra delle rendite. Il perchè essendo disuguali i tempi non meno che i capitali, la ragione delle rendite sarà composta da quella dei tempi e dall'altra dei capitali. Adunque dovrà stare il prodotto 17×5240 del primo capitale pel tempo, in che esso si tenne impie-

» gato, al prodotto 13×7360 del secondo capitale
 » pel tempo in che fu tenuto impiegato, come la
 » rendita $340^{\text{duc.}}$ del primo capitale al quarto
 » proporzionale ». Sarà questo uguale a

$$13 \times 7360 \times 340^{\text{duc.}}$$

$\frac{13 \times 7360 \times 340^{\text{duc.}}}{17 \times 5240}$, come si è da principio rinvenuto

per mezzo di due analogie. Ma il prodotto di
 13 per 7360 moltiplicato per 340 adegua
 32531200, che diviso per 89080 prodotto di
 17 per 5240 dà per quoziente $365 \frac{1700}{8908}$, o sia

$365 \frac{25}{131}$. Dunque la rendita domandata sarà di

ducati $365 \frac{25}{131}$.

Capitali	Tempi	Rendita corrispondente al primo capitale.
5240 ^{duc.}	17 ^{mesi}	340 ^{duc.}
7360 ^{duc.}	13 ^{mesi}	

Della Regola del Tre inversa semplice.

§. 196. *Def. XXXVIII.* Chiamasi *Regola del Tre inversa semplice* quella per mezzo della quale vien risolta ogni quistione aritmetica, ove si rilevi, che di tre numeri dati il primo corrisponda al terzo e serbi al secondo la ragione inversa dello stesso terzo termine a quello, che si domanda.

P R O B L E M A.

§. 197. *Da 35 persone si è consumata una data quantità di grano in 48 giorni. Si vuol sapere in quanto tempo la stessa quantità di grano si sarebbe consumata da 140 persone.*

Sol. Poichè in 48 giorni da 35 persone si è consumata una data quantità di grano; l'è chiaro, che la stessa si sarebbe consumata nella metà di 48 giorni da due volte 35 persone, nella terza parte di 48 giorni da tre volte 35 persone, ec. Adunque col crescere il numero delle persone diminuisce quello dei giorni, nei quali la data quantità di grano si consuma, poste tutte le altre cose uguali. Il perchè la ragione di 35 a 140 dev' essere inversa di quella di 48 giorni, che corrispondono a 35 persone, al numero dei giorni domandati. Onde se facciasi $140 : 35 :: 48$ al quarto proporzionale 12; questo ne dovrà dinotare il numero dei giorni domandati.

Della Regola del Tre inversa composta.

§. 198. *Def. XXXIX.* La *Regola del Tre inversa composta* è quella per mezzo della quale si risolvono le quistioni, ove oltre ai termini della *Regola del Tre inversa semplice* ve ne sono o due altri, o quattro, ec., che essendo a due a due annessi al primo e secondo dei termini principali, sono tali che moltiplicando i loro prodotti rispettivamente per quei medesimi due primi termini ne fanno risultare due numeri, che col terzo di quei tre primi riducono la quistione proposta alla *Regola del Tre inversa semplice*.

§. 199. *Scol.* La quistione, che quaggiù vien rapportata, ne chiarirà la precedente definizione.

§. 200. *Da 25 operai si è compito un dato lavoro in 37 giorni impiegandovi 7 ore al giorno. Si vuol sapere quanti giorni vi avrebbero impiegato 11 operai travagliandovi 9 ore al giorno.*

Sol. Se i secondi lavoratori impiegassero al travaglio tante ore in ciascun giorno per quante ne impiegano i primi, la quistione proposta si ridurrebbe alla regola precedente; poichè, poste le altre cose uguali, aumentando il numero dei lavoratori diminuisce quello dei giorni, che vi bisognano a compiere un dato travaglio, e viceversa. Adunque per determinare il numero dei giorni, in che da 11 lavoratori impiegando 7 ore al giorno si compirebbe quel travaglio, che da 25 lavoratori si compie in 37 giorni travagliandovi pure 7 ore al giorno, dovrà istituirsi la seguente proporzione; cioè 11:

$$25 :: 37 : \frac{25 \times 37}{11}.$$

Ora essendo $\frac{25 \times 37}{11}$ il numero dei giorni, in che da 11 lavoratori si compie un dato travaglio impiegandovi 7 ore al giorno; l'è chiaro, che il numero dei giorni verrà diminuito aumentando si quello delle ore di travaglio in ciascun giorno. E quindi sarà pure 7 ore a 9 ore nella ragione inversa del numero dei giorni poc' anzi trovati al numero dei giorni, che si domanda; cioè dovrà stare

$$9 : 7 :: \frac{25 \times 37}{11} \text{ al quarto,}$$

che sarà uguale a $\frac{7 \times 25 \times 37}{9 \times 11}$. Che se i termini dati si dispongano nella maniera quaggiù esibita, e poi si dica « Se le ore di travaglio in ciascun giorno fossero le stesse pei primi e pei secondi lavoratori, aumentando il numero dei lavoratori dovrà diminuire quello dei giorni, che vi bisognano a compiere un dato travaglio, e viceversa; dunque la ragione dei lavoratori è inversa di quella dei giorni di travaglio. In oltre, se il numero dei primi lavoratori fosse lo stesso che quello dei secondi, aumentando le ore di travaglio in ciascun giorno, dovrà diminuire quello dei giorni di travaglio; dunque la ragione delle ore di travaglio in ciascun giorno è inversa di quella dei giorni di travaglio. Il perchè essendo differenti le ore di travaglio in ciascun giorno non che i lavoratori, la ragione dei giorni di travaglio sarà composta dall'inversa di quella delle ore, e dall'inversa dell'altra dei lavoratori. Adunque dovrà stare il prodotto 11×9 dei secondi lavoratori per le ore, che essi travagliano in ciascun giorno, al prodotto 25×7 dei primi lavoratori per le ore, che essi travagliano in ciascun giorno, come 37 giorni di travaglio dei primi lavoratori, al quarto proporzionale, che sarà uguale $\frac{25 \cdot 7 \cdot 37}{11 \cdot 9}$, come poc'anzi si è rinvenuto ».

Ma $\frac{25 \cdot 7 \cdot 37}{11 \cdot 9}$ adegua $65 \frac{40}{99}$. Adunque i giorni di travaglio dei secondi lavoratori dovranno essere $65 \frac{40}{99}$. Ma i secondi lavoratori travagliano sole

9 ore al giorno ; dunque la frazione $\frac{40}{99}$ dovrà considerarsi come parte di 9 ore , e non già di 24 ore , che è la durata del giorno. Il perchè i secondi lavoratori a compiere il dato travaglio impiegandovi 9 ore al giorno vi porranno 65 giorni 3 ore e 38 minuti in circa.

25 lavor. 7 ore di trav. 37 gior.

11 9

Della Regola del Tre composta mista.

§. 201. *Def. XL.* Qualora vien proposta una quistione , nella quale si rilevi , che uno dei termini dati dee serbare a quello , che si domanda una ragione , che sia composta dalle ragioni , alcune dirette ed altre inverse dei termini , che sono annessi al terzo e quarto termine , la regola colla quale sarà risolta una tal quistione dirassi *Regola del Tre composta mista.*

P R O B L E M A.

§. 202. *Per fabbricare un muro lungo 87 canne , alto 3 canne e 2 palmi , e largo 6 palmi vi si sono impiegate 12 persone in 17 giorni travagliandovi 9 ore al giorno. Si vuol sapere quanto sarà lungo quel muro , che si potrà fabbricare da 19 persone in 13 giorni travagliandovi 11 ore al giorno , essendo l'altezza di esso di 2 canne e 5 palmi , e la larghezza di 5 palmi.*

Sol. Suppongasi , che sieno uguali i tempi , in che travagliano i primi ed i secondi lavoratori , non che le altezze e le larghezze delle due

due mura. Dovrà stare il numero dei primi lavoratori al numero dei secondi, come la lunghezza del muro fatto dai primi a quella del muro, che si potrà fabbricare dai secondi; cioè

12 : 19 :: 87 al quarto $\frac{19 \cdot 87}{12}$, che sarà la lunghezza del muro, che si potrà fabbricare da 19

lavoratori in 17 giorni travagliandovi 9 ore al giorno, essendo l'altezza dello stesso muro di 3 canne e 2 palmi, e la larghezza di 6 palmi.

Or poichè questi secondi lavoratori travagliano 11 ore al giorno; l'è chiaro, che se facciasi il numero delle ore 9, in che travagliano in ciascun giorno i primi lavoratori, al numero 11 delle ore, in che travagliano i secondi, come

$\frac{19 \cdot 87}{12}$ al quarto proporzionale $\frac{11 \cdot 19 \cdot 87}{9 \cdot 12}$; questo ne

dovrà dinotare la lunghezza di quel muro, che essendo alto 3 canne e 2 palmi e largo 6 palmi si fabbricherebbe da 19 lavoratori in 17 giorni travagliandovi 11 ore al giorno. Ma questi secondi lavoratori travagliano 11 ore al giorno per soli 13 giorni; dunque dee stare 17 : 13::

$\frac{11 \cdot 19 \cdot 87}{12}$ al quarto $\frac{13 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 87}{17 \cdot 9 \cdot 12}$, che sarà la lunghezza di quel muro, che essendo altro 3 canne e 2 palmi e largo 6 palmi, può fabbricarsi

da 19 lavoratori in 13 giorni travagliandovi 11 ore al giorno. In oltre, poichè l'altezza del muro fatto dai primi fabbricatori è di 3 canne e 2 palmi, o sia di 26 palmi, e quella del muro, che si dovrà fabbricare dai secondi è di 2 canne e 5 palmi, ovvero di 21 palmi; l'è chiaro, che diminuendo l'altezza del muro debba crescere la lunghezza di esso, poste le altre co-

se uguali. Onde dovrà stare 21 a 26 nella ragione di $\frac{13. 11. 19. 87}{17. 9. 12}$, alla lunghezza

$\frac{26. 13. 11. 19. 87}{21. 17. 9. 12}$ del muro, che essendo alto 2

canne e 5 palmi e largo 6 palmi, si fabbricherebbe da 19 lavoratori in 13 giorni travagliando 11 ore al giorno. Ma il muro da fabbricarsi da 19 lavoratori è largo 5 palmi, ed a misura che diminuisce la larghezza del muro, poste le altre cose uguali, aumenta la lunghezza di esso; dunque dee stare 5 palmi a 6 palmi nella ragione di $\frac{26. 13. 11. 19. 87}{21. 17. 9. 12}$ al quarto

proporzionale $\frac{6. 26. 13. 11. 19. 87}{5. 21. 17. 9. 12}$, che sarà la

domandata lunghezza. Or poichè il precedente quarto proporzionale adegua il prodotto di 87

canne per l'altro dei fratti $\frac{19}{12}, \frac{11}{9}, \frac{13}{17}, \frac{26}{21}$, e

$\frac{6}{5}$; l'è chiaro, che la data lunghezza 87 canne

del muro debba stare alla lunghezza del muro da fabbricarsi in ragion composta di 12 : 19, di 9 : 11, di 17 : 13, di 21 : 26, e di 5 : 6; cioè a dire in ragion composta del numero dei fabbricatori, che s'impiegano pel primo muro, a quello dei fabbricatori, che s'impiegano pel secondo, delle ore di travaglio, che in ciascun giorno impiegano i primi, alle ore di travaglio, che v'impiegano i secondi, dei giorni, in che travagliano i primi, ai giorni, in che travagliano i secondi, dell'inversa dell'altezza del primo muro all'altezza del secondo, e dell'inversa della larghezza del primo muro alla

larghezza del secondo. Il perchè la domandata lunghezza del muro potrà determinarsi per mezzo di una sola analogia, di cui il primo termine sia il prodotto $12 \times 9 \times 17 \times 21 \times 5$ degli antecedenti di tutte le ragioni componenti, il secondo sia il prodotto $19 \times 11 \times 13 \times 26 \times 6$ dei conseguenti delle medesime ragioni, e l' terzo sia la lunghezza 87 canne del muro già fabbricato. Onde il quarto proporzionale si troverà uguale a 191 canne e 2 palmi in circa.

Della Regola di Alligazione.

§. 203. *Def. XLI.* Chiamasi *Regola di Alligazione* quella colla quale o si determina il prezzo di una data misura del miscuglio di più cose della stessa specie, ma di diverse qualità, o pure si determinano le quantità di ciascuna di quelle cose, affinchè si abbia un miscuglio di una data misura, che sia di un dato prezzo.

§. 204. *Cor.* Affinchè sia risolvibile una questione relativa al secondo caso della *Regola di Alligazione*, l'è mestieri, che il prezzo dato corrispondente alla data misura del miscuglio sia minore del costo della stessa misura della migliore qualità delle cose da mischiarsi, e maggiore del costo di detta misura della infima qualità delle stesse cose, che debbono mischiarsi. E per tal ragione quel prezzo dato dicesi *prezzo medio*.

P R O B L E M A I.

§. 205. *Vi sono tre qualità di vini, di cui un barile della prima qualità costa carlini*

23, uno della seconda carlini 27, ed uno della terza carlini 33. Si vuol sapere il costo di un barile del miscuglio, che si fa da 2 barili del vino della prima qualità, da 3 della seconda, e da 4 della terza.

Sol. Poichè un barile del vino della prima qualità costa carlini 23, uno della seconda carlini 27, ed uno della terza carlini 33; dovrà essere 46 carlini il prezzo di 2 barili del vino della prima qualità, 81 carlini quello di 3 barili della seconda, e 132 carlini il prezzo di 4 barili del vino della terza qualità. Dunque mischiando insieme 2 barili della prima qualità, 3 della seconda, e 4 della terza, si avranno 9 barili di un vino, il cui costo sarà di carlini 259, che è la somma di 46 carlini, di 81 carlini, e di 132 carlini. Il perchè se dividasi 259 carlini per 9, si avrà per quoziente 28 carlini e $\frac{7}{9}$, che sarà il costo di un barile del miscuglio.

P R O B L E M A II.

§. 206. *Un Cantiniere ha due qualità di vini, di cui un barile della prima qualità costa carlini 25, ed uno della seconda carlini 32. Egli da queste due qualità di vini vuol formarne una, che costi carlini 28 al barile. Si vuol sapere qual parte il Cantiniere debba prendere di un barile della prima qualità e quale della seconda per ottenere un barile del costo di 28 carlini.*

Sol. E poichè il prezzo medio 28 carlini supera 25 carlini, che è il primo dei prezzi dati, per carlini 3, e lo stesso prezzo medio è

minore di 32 carlini, che è il secondo dei prezzi dati, per carlini 4, il quadruplo di 28 carlini dovrà superare il quadruplo di 25 carlini per 4 volte 3 carlini, o sia per 12 carlini, e il triplo di 28 carlini dovrà essere minore del triplo di 32 carlini per 3 volte 4 carlini, cioè per 12 carlini. Dunque il quadruplo di 25 carlini e 'l triplo di 32 carlini insieme presi debbono uguagliare il settuplo di 28 carlini. Il perchè se mischiansi 4 barili del vino della prima qualità con 3 barili di quello della seconda, si otterranno 7 barili di un miscuglio, di cui il costo sarà 7 volte 28 carlini; e perciò un solo barile di tale miscuglio dovrà costare carlini 28. Or poichè l'intero miscuglio vien formato da $\frac{4}{7}$ del vino della prima qualità e da $\frac{3}{7}$ del vino di quello della seconda, in un barile di esso dovranno contenersi $\frac{4}{7}$ di barile della prima qualità di vino, e $\frac{3}{7}$ di barile di quello della seconda. Ma il comune denominatore 7 dei due fratti $\frac{4}{7}$ e $\frac{3}{7}$ è la differenza dei numeri 25 e 32, che in carlini ne dinotano i prezzi dati, e sono poi i numeratori 4 e 3 dei medesimi fratti le rispettive differenze del prezzo medio dal secondo e dal primo dei prezzi dati. Dunque se i prezzi dati si dispongano come quaggiù si vede, e poi la differenza 3 tra 'l prezzo medio 28 e 'l minore dei prezzi dati 25 si ponga accanto al maggiore di questi 32, e la differenza 4 tra 'l prezzo medio 28 e 'l maggiore dei prezzi dati 32 si ponga accanto al minore di

di questi 25; i fratti, che avranno per numeratori 4 e 3 e per comune denominatore la differenza 7 dei prezzi dati 25 e 32, dovranno rispettivamente dinotarne le parti di un barile, che si dovranno prendere della prima e della seconda qualità di vino per ottenere un sol barile del costo di 28 carlini.

<i>Prezzo medio</i>	<i>Prezzi dati</i>	<i>Differenze reciproche del prezzo medio / dai dati</i>	<i>Parti da prend. dai barili di vini delle date qualità</i>
	25 ^{car.}	4	4 —
28			7
	32 ^{car.}	3	3 —
			7
Diff. dei prezzi dati 7 ^{car.}			

P R O B L E M A III.

§. 207. Vi sono diverse qualità di liquori A, B, C, D, E, di cui una misura della prima qualità costa carlini 17, una della seconda carlini 19, una della terza carlini 23, una della quarta carlini 25, ed una della quinta carlini 29; determinare le parti di queste diverse qualità di liquori, che formano una misura del costo di carlini 22.

Sol. Poichè una misura della qualità A di liquore costa carlini 17 ed una della qualità B costa carlini 19, e questi prezzi sono ambedue minori del prezzo medio dato, che è di carlini 22; l'è chiaro, che se mischiansi insieme una

misura di liquore della qualità A ed una della qualità B, ogni misura del miscuglio dovrà costare carlini 18, che è minore del prezzo medio dato. In oltre, mischiando insieme una misura di liquore della qualità C, una della qualità D, ed una della qualità E, di cui ciascuna costa più di carlini 22, che è il prezzo medio dato, dovrà risultarne un miscuglio, di cui ciascuna misura costerà la terza parte di quello, che costano le tre misure insieme, cioè carlini $25\frac{2}{3}$, che è maggiore del prezzo medio dato. Il perchè la soluzione della presente quistione trovasi ridotta a determinare le parti, che debbono prendersi di due uguali misure di liquori, di cui una costi carlini 18 e l'altra carlini $25\frac{2}{3}$; tal che una misura del miscuglio costi carlini 22. Il che si esegue come nella quistione precedente.

Della Regola di Società.

§. 208. *Def. XLII.* Chiamasi *Regola di Società* quella colla quale si risolvono tutte le quistioni, che si riducono a dividere un numero dato in più parti, che sieno proporzionali ad altri numeri anche dati.

§. 209. *Scol.* Questa Regola vien detta di Società; poichè per mezzo di essa si determinano le parti del guadagno, o della perdita fatta da più persone, che hanno fatta società ponendo a traffico disuguali somme per un certo tempo, o somme uguali in tempi disuguali, o finalmente disuguali somme in tempi disuguali.

§. 210. Tre negozianti *A*, *B*, *C* hanno fatta società per un certo tempo, e'l primo di essi *A* ha tenuto impiegato il capitale di ducati 1360, il secondo *B* vi ha impiegato il capitale di ducati 2500, e'l terzo vi ha impiegato il capitale di ducati 1840. Terminata la società si è trovato, che il lucro totale *P* è stato di ducati 950. Si vogliono determinare le parti dell'intiero guadagno, che spettano rispettivamente ai socii *A*, *B*, *C*.

Sol. Essendo 5700 ducati la somma dei tre capitali impiegati 1360, 2500, e 1840 ducati, l'è chiaro, che tal somma debba serbare all'intiero lucro la ragione di uno dei capitali al guadagno corrispondente a tal capitale. Adunque i quarti proporzionali delle tre seguenti analogie ne dovranno dinotare i guadagni corrispondenti ai capitali, che formano i terzi termini delle medesime analogie; cioè dovrà stare

$5700 : 950 :: 1360^{\text{duc.}} : 226^{\text{duc. 6car. 6gr.}}$
 8^{cav.}, che sarà il lucro del socio *A*,

$5700 : 950 :: 2500^{\text{duc.}} : 416^{\text{duc. 6car. 6gr.}}$
 8^{cav.}, che sarà il lucro del socio *B*, e

$5700 : 950 :: 2500 : 306^{\text{duc. 6car. 6gr. 8cav.}}$
 che sarà il lucro del socio *C*.

PROBLEMA II.

§. 211. Tre negozianti hanno preso l'appalto per fornire il vestiario ad un certo numero di soldati pel tempo di due anni, ponendo ciascuno la somma di ducati 2570. Decorsi 9 mesi dall'epoca del contratto, che

essi aveano fatto, il primo dei tre socii si ha ritirato il suo capitale e'l secondo ha fatto lo stesso alla fine di 21 mesi. Terminati i due anni si è trovato il guadagno totale di ducati 2320. Si vuol sapere quali sieno le parti dell'intero guadagno, che spettano rispettivamente a quei tre socii.

Sol. Essendo 9 mesi, 21 mesi, e 24 mesi i rispettivi tempi, in che i tre socii hanno tenuti impiegati i loro capitali, di cui ciascuno è di ducati 2570, sarà chiaro, che il guadagno totale sia lo stesso di quello del capitale di ducati 2570 impiegato pel tempo di 54 mesi, che è la somma di 9 mesi, 21 mesi, e 24 mesi. Il perchè dovrà stare 54 mesi a 9 mesi nella ragione del guadagno totale di 2320^{duc.} alla porzione di tal guadagno, che spetta al primo dei tre socii, cioè a 386^{duc.} 66^{gr.} 8^{cav.}, e 54 mesi a 21 mesi come 2320^{duc.} a 902^{duc.} 22^{gr.}

2^{cav.} $\frac{2}{3}$, che sarà la porzione del guadagno totale, che spetta al secondo dei tre socii, e finalmente dovrà stare 54 mesi a 24 mesi nella ragione di 2320^{duc.} a 1031^{duc.} 11^{gr.} 1^{cav.}

$\frac{1}{3}$, che sarà la porzione dell'intero guadagno, che spetta al terzo dei tre socii.

P R O B L E M A III.

§. 212. *Tre negozianti hanno preso l'appalto per fornire il vestiario ad un certo numero di soldati per lo spazio di due anni. Il primo di essi ha impiegato per tale appalto duc. 2570, il secondo duc. 3430, e'l terzo*

duc. 4500. Decorsi 9 mesi dall' epoca del contratto, che essi aveano fatto, il primo dei tre socii si ha ritirato il suo capitale, e l' secondo ha fatto lo stesso a capo di 21 mesi. Terminati i due anni si è trovato il guadagno totale di duc. 4270. Si vuol sapere quali sieno le parti dell' intiero guadagno, che spettano rispettivamente a quei tre socii.

Sol. Poichè il primo socio ha tenuto impiegato il capitale di ducati 2570 per lo spazio di di 9 mesi, egli dovrà avere tal parte dell' intiero guadagno, che gli spetterebbe se avesse impiegato per lo spazio di un sol mese il nonuplo dello stesso capitale; cioè se avesse tenuto impiegato per un sol mese il capitale di ducati 23130. Similmente il secondo socio dovrà percepire tal parte dell' intiero guadagno, quanta ne percepirebbe se in un sol mese avesse tenuta impiegata la somma di ducati 72030, che è il prodotto del numero 21 dei mesi, in che ha tenuto impiegato il suo capitale, per lo stesso capitale 3430 ducati. Finalmente al terzo dei tre socii dovrà spettare tal parte dell' intiero guadagno, quanta gliene spetterebbe se per un solo mese avesse tenuto impiegato il capitale di duc. 108000, che è il prodotto del numero 24 dei mesi, in che ha tenuto impiegato il capitale di ducati 4500, per lo stesso capitale. Adunque se quei tre negozianti avessero preso l' appalto per un sol mese, e l' primo di essi avesse impiegato il capitale di ducati 23130, il secondo quello di ducati 72030, e l' terzo l' altro di ducati 108000, alla fine del detto mese il guadagno totale sarebbe stato pure di ducati 4270. Il perchè i quarti proporzionali delle se-

guenti analogie ne dovranno dinotare i guadagni corrispondenti ai capitali, che formano i terzi termini delle medesime analogie; cioè dovrà stare $203160 : 4270 :: 23130^{\text{duc.}} : 486^{\text{duc.}}$ $14^{\text{gr.}} 5^{\text{cav.}}$ in circa, che sarà il guadagno del primo dei tre soci, $203160 : 4270 :: 72030^{\text{duc.}} : 1513^{\text{duc.}}$ $92^{\text{gr.}}$ in circa, che sarà il guadagno del secondo dei tre socii, e finalmente $203160 : 4270 :: 108000^{\text{duc.}}$ $2269^{\text{duc.}}$ $93^{\text{gr.}} 6^{\text{cav.}}$ in circa, che sarà il guadagno del terzo dei tre socii.

Nella Regola dell'interesse composto, che dicesi pure Regola di sconto o di interesse a scalare.

§. 213. Def. XLIII. La Regola dell'interesse composto, di sconto, ovvero di interesse a scalare è quella colla quale si risolvono tutte le quistioni, nelle quali si vuol determinare il tempo, che dee decorrere affinchè una persona pagando uguali somme dopo uguali intervalli di tempo possa estinguere il debito, che ha contratto prendendo ad imprestito un capitale colla condizione di pagarvi l'interesse in una data ragione.

A questa regola si riferiscono pure quelle quistioni, nelle quali vien proposto di determinare la somma, che alla fine di un dato tempo dee pagarsi da una persona, la quale avendo preso ad imprestito un capitale colla condizione di pagarvi l'interesse in una data ragione, conosce solo a che monterebbe il suo debito alla fine di un altro tempo determinato.

P R O B L E M A I.

§. 214. *Sempronio riceve da Cajo la somma di ducati 1800 colla condizione di pagarli alla fine di ogni anno l'interesse alla ragione del $6\frac{1}{2}$ per 100. Sempronio vuole estinguere il suo debito pagando a Cajo la somma di duc. 700 in ciascun anno. Si vuol sapere quanti anni Sempronio metterà a scontare il suo debito, e quanto dovrà dare a Cajo nell'ultimo anno.*

Sol. E poichè il capitale di 100 duc. dà duc. $6\frac{1}{2}$ di rendita annua, dovrà stare

$100 : 1800 :: 6\frac{1}{2}$ duc. : 117 duc., che sarà l'interesse, che Sempronio dovrebbe pagare a Cajo alla fine del primo anno. Ma Sempronio alla fine del primo anno paga a Cajo ducati 700. Dunque egli oltre dell'interesse di ducati 117 paga a Cajo duc. 583 del capitale. Il perchè Sempronio alla fine del primo anno resterà debitore di soli ducati 1217, che è la differenza tra duc. 1800 e duc. 583. In oltre, poichè il capitale di 100 duc. dà duc. $6\frac{1}{2}$ di rendita annua, dovrà stare

$100 : 1217 :: 6\frac{1}{2}$ duc. : duc. 79,105, che sarà l'interesse del capitale di duc. 1217. Ma Sempronio alla fine del secondo anno paga a Cajo duc. 700. Dunque egli oltre dell'interesse paga a Cajo duc. 620, 895 del capitale di 1217 duc. Il perchè Sempronio alla fine del se-

condo anno resterà debitore di Cajo per duc. 596, 105. Finalmente, poichè sta

$$100 : 596, 105 :: 6 \frac{1}{2} \text{ duc.} : \text{duc. } 38,746825,$$

dovrà essere l'interesse del $6 \frac{1}{2}$ per 100 sulla somma di ducati 596, 105 uguale a duc. 38,746825.

Il perchè Sempronio nel terzo anno dovrà a Cajo la somma di duc. 596, 105 e di duc. 38,746825, o sia dovrà a Cajo duc. 634 e gr. 85 in circa, restando intieramente estinto il suo debito.

P R O B L E M A II.

§. 215. *Sempronio prende ad imprestito da Cajo una certa somma, la quale unita all'interesse del 7 per 100 alla fine di un anno monterebbe a duc. 2140. Egli nella fine di 5 mesi vuole estinguere il suo debito. Si vuol sapere quanto dovrà pagare Sempronio a Cajo.*

Sol. E poichè 100 duc. di capitale danno duc. 7 di rendita annua, dovrà stare (§. 168.) la somma $107^{\text{duc.}}$ del capitale e della rendita corrispondente a $7^{\text{duc.}}$ nella ragione di $2140^{\text{duc.}}$ somma del capitale e della rendita corrispondente alla rendita $140^{\text{duc.}}$ del capitale, che Cajo ha impiegato con Sempronio. Adunque la somma impiegata da Cajo a Sempronio coll'interesse annuo del 7 per 100 l'è stata di $2000^{\text{duc.}}$, che è la differenza tra $2140^{\text{duc.}}$ e $140^{\text{duc.}}$. Ora essendo $140^{\text{duc.}}$ la rendita del capitale di $2000^{\text{duc.}}$ per 12 mesi, dovrà stare
12 mesi a 5 mesi come $140^{\text{duc.}}$ a $58^{\text{duc.}} 33^{\text{gr.}} 4^{\text{cav.}}$,

che sarà l'interesse del capitale di 2000^{duc.} per lo spazio di 5 mesi. Il perchè Sempronio alla fine di 5 mesi dovrà pagare a Cajo 2058^{duc.} 33^{gr.} 4^{cav.}, che è la somma di 2000^{duc.} e di 58^{duc.} 33^{gr.} 4^{cav.}.

Della Regola del falso, o della falsa posizione.

§. 216. *Def. XLIV.* La regola del falso o della falsa posizione è quella colla quale si risolve ogni quistione aritmetica, ove per mezzo di uno o due numeri presi ad arbitrio si perviene a determinare quell'altro numero, che realmente soddisfa al quesito. Ciascuno di quei numeri, che servono per determinare quell'altro, che soddisfa alla quistione proposta chiamasi *posizione*: e la *Regola* della falsa posizione si dirà *semplice*, o *doppia* secondo che per risolvere il quesito convien fare una sola, e due posizioni.

§. 217. *Scol.* Dalle soluzioni dei quesiti, che quaggiù vengono proposti si potrà rilevare ciò che debba farsi per risolvere le quistioni relative alla Regola del falso.

P R O B L E M A I.

§. 218. *Un Padre di famiglia morendo lascia eredi tre suoi figli, che si abbiano a dividere l'eredità di 6000 ducati in modo, che il primo abbia due volte quello, che avrà il secondo, ed il secondo abbia tre volte quello, che spetterà al terzo; fa duopo determinare le parti dell'intera eredità, che spettano rispettivamente a quei tre fratelli.*

Sol. Dalla proposta quistione si rileva, che se fosse nota quella parte dell'intera eredità, che spetta al terzo dei tre fratelli, si potrebbero determinare le altre due parti; poichè quella del secondo dev'essere il triplo di quella del terzo, e la porzione del primo dev'essere il doppio di quella del secondo. Il perchè se il terzo dei tre fratelli avesse un sol ducato dell'intera eredità, il secondo ne avrebbe 3, ed il primo 6. Ma queste tre porzioni 1, 3, e 6 insieme prese sono uguali a 10. Dunque il numero 10, e gli altri 6, 3, ed 1 devono essere proporzionali a 6000 ducati, ed alle porzioni della stessa eredità, che spettano al primo, al secondo, ed al terzo fratello. Vale a dire, che la ragione di 10 : 6, ad egua quella di 6000 ducati alla porzione del primo fratello, la ragione di 6 : 3 dee pareggiare la ragione della porzione del primo a quella del secondo, e quella di 3 : 1 dev'essere uguale all'altra della porzione del secondo a quella del terzo. Il perchè la ragion (§. 173.) composta di 10 : 6, di 6 : 3, di 3 : 1 dee pareggiare l'altra, che si compone dalle ragioni di 6000 ducati alla porzione del primo fratello, della porzione del primo fratello alla porzione del secondo, e della porzione del secondo a quella del terzo. Ma la prima ragion composta pareggia quella (§. 174.) di 10 : 1, e la seconda è poi uguale all'altra di 6000 ducati alla porzione del terzo fratello. Dunque se facciasi

$$10 : 1 :: 6000^{\text{duc.}} : \text{al quarto proporzionale } 6000^{\text{duc.}}$$

questo dovrà dinotarne la porzione dell'eredità, che spetta al terzo dei tre fratelli. E quindi il secondo fratello dovrà avere 18000^{duc.}, e l'pri-

mo $36000^{\text{duc.}}$, e queste tre parti $6000^{\text{duc.}}$, $18000^{\text{duc.}}$, e $36000^{\text{duc.}}$ insieme prese formano la somma di $60000^{\text{duc.}}$, che è l'intiera eredità.

§. 219. *Scol.* La posizione 1, che ha servito per dinotare la parte dell'intiera eredità, che spetta al terzo dei tre fratelli, ha ridotta la questione quassù proposta ad una semplice divisione: laddove ponendo un altro numero per posizione, la parte del terzo fratello si sarebbe ottenuta per mezzo di una moltiplica ed una divisione. Il perchè nelle soluzioni dei quesiti relativi alla Regola del falso semplice gioverà assumere l'unità per posizione.

P R O B L E M A II.

§. 220. *Un Padre di famiglia morendo lascia eredi tre suoi figli A, B, C, che si abbiano a dividere l'eredità di 60000 ducati in modo, che il primo A abbia due volte quanto avrà il secondo B e di più 200 duc., ed il secondo B abbia tre volte quanto avrà il terzo C e di più 300 ducati; fa duopo determinare le parti dell'intiera eredità, che spettano rispettivamente ad A, B, C.*

Sol. E poichè il secondo fratello B dee avere dell'intiera eredità il triplo di quanto spetta a C e di più 300 ducati, ed il primo A dee avere il doppio di quanto spetta a B, e di più 200 ducati, egli è chiaro, che A debba avere sei volte ciò che spetta a C più la somma di 400 ducati, che è il doppio di 200 ducati, più 300 ducati; cioè A dee avere sei volte ciò che spetta a C e di più 700 ducati. Il perchè se dall'intiera eredità si tolgano 700 ducati, che

si diano ad A , e dal residuo si tolgano altri 300 ducati, che si diano a B , vi dovranno restare ducati 59000, che si dovranno dividere a tre persone A , B , C in modo che A abbia il doppio di B , e B il triplo di C. Dunque se pongasi uguale ad 1.^{duc.} la parte di C , dovrà essere 3.^{duc.} la parte di B , ed uguale a 6.^{duc.} la parte di A. Ma le tre parti 1.^{duc.}, 3.^{duc.}, e 6.^{duc.} insieme prese formano la somma di 10.^{duc.}; perciò dee stare: (§. 218.).

10.^{duc.} : 1.^{duc.} :: 59000.^{duc.} : 5900.^{duc.}, che dovrà essere la parte di C. Il perchè la parte di B dovrà essere di 17700 ducati, oltre i ducati 300 già presi dall'intera eredità, e la parte di A dovrà essere di 35400 ducati, oltre i 700 ducati già presi dai 60000 ducati.

P R O B L E M A III.

§. 221. *Dividere la somma di 60000 ducati a quattro persone A , B , C , D , tal che A abbia il doppio di B , toltone 300 ducati, B abbia il triplo di C e di più 500 ducati, e C abbia il quintuplo di D toltone 1800 ducati.*

Sol. E poichè della somma di 60000 ducati B deve averne il triplo di quello, che ha C , e di più 500 ducati, e C dee averne il quintuplo di ciò che ha D toltone 1800 ducati; sarà chiaro, che B debba averne tre volte il quintuplo di quello, che avrà D , toltone tre volte 1800 ducati, ed oltre a questa somma dovrà avere altri 500 ducati. Ma il triplo di 1800 ducati adegua 5400 ducati. Dunque B della somma di 60000 ducati dovrà avere tre volte il quintuplo di ciò che avrà D toltone 5400 ducati,

ed aggiuntovi 500 ducati ; cioè B dovrà avere quindici volte ciò che spetta a C toltone 4900 ducati , che è la differenza tra 5400 ducati e 500 ducati. Ma A dee avere il doppio di ciò che spetta a B toltone 300 ducati. Dunque A dovrà avere trenta volte ciò che spetta a D toltone due volte 4900 ducati e toltone pure 300 ducati ; ovvero A dovrà avere trenta volte ciò che spetta a D toltone 10100 ducati , che è la somma del doppio di 4900 ducati e di 300 ducati. Il perchè il proposto Problema vedesi ridotto a dividere la somma di 60000 ducati a quattro persone A, B, C, D, tal che A abbia 30 volte ciò che spetta a D toltone 10100 ducati, B abbia quindici volte ciò che spetta a D toltone 4900 ducati, e C il quintuplo di D toltone 1800 ducati.

Suppongasi, che A sborsi la somma di 10100 ducati, B quella di 4900 ducati, e C ducati 1800, e che queste somme si aggiungano a 60000 ducati ; dovrà risaltarne l'intera somma di ducati 76800, che si dovrà dividere a quattro persone A, B, C, D, tal che A abbia 30 volte ciò che spetta a D, B 15 volte ciò che spetta a D, e C 5 volte ciò che spetta a D. Il perchè se dinotisi con 1 la parte di D, le parti di A, B, C ne saranno rispettivamente dinotate da 30, 15, e 5, e la somma 51 dei numeri 30, 15, 5, ed i dovrà serbare ad 1 la stessa ragione (§. 174.) di 76800 ducati alla porzione di D. Ma 51 sta ad 1 come 76800 a 1505 $\frac{45}{51}$. Dunque della somma di 60000 ducati D ne

dovrà avere ducati 1505 $\frac{45}{51}$, o sia 1505 $\frac{15}{17}$, e

con ciò C ne avrà ducati $5729\frac{7}{17}$, B ducati 17688
 $\frac{4}{17}$, ed A ducati $35076\frac{8}{17}$.

P R O B L E M A IV.

§. 222. *Un giovane domanda a suo Padre: quale è attualmente la mia età? il Padre risponde la vostra età è attualmente un terzo della mia, e sei anni sono n'era il quarto: Si domanda l'età di ciascuno.*

Sol. Suppongasi, che l'attuale età del figlio sia di 10 anni. Sarà l'attuale età del padre di anni 30. Onde 6 anni prima che il figlio avesse fatta tale interrogazione al padre, il padre dovea avere 24 anni, ed il figlio l'età di 4 anni. Ma 4 è minore per 2 della quarta parte 6 di 24. Dunque la posizione 10, che si è adottata per dinotare l'attuale età del figlio, non soddisfa al proposto quesito. Or poichè non vi è mezzo onde poter determinare con una proporzione l'attuale età del figlio, si supponga, che essa sia di anni 12. Sarà il padre di anni 36, e sei anni prima il figlio dovea avere anni 6, e l'padre dovea avere anni 30. Ma 6 è minore per 1 $\frac{1}{2}$ di 7 $\frac{1}{2}$, che è la quarta parte di 30. Adunque neppure la posizione 12, che si è adottata per dinotare l'attuale età del figlio soddisfa al proposto Problema. Quindi essendo gli errori 2 ed $1\frac{1}{2}$ ottenuti dalle due precedenti posizioni ambedue in meno, ed il minore di essi ottenendosi dall'età maggiore; l'è chiaro,

chese $\frac{1}{2}$, che è la differenza dei due errori, vien prodotto dalla differenza 2 delle posizioni, la differenza $1\frac{1}{2}$ tra 'l secondo errore e l' errore zero dovrà essere prodotta dal quarto proporzionale 6, che rinviansi in ordine ad $\frac{1}{2}$, 2, ed $1\frac{1}{2}$.

Dunque affinchè svanisca l'errore $1\frac{1}{2}$ ottenuto dalla seconda posizione, convien che si aumenti di 6 la stessa posizione. Il perchè l'attuale età del figlio deve essere di anni 18, che è la somma della seconda posizione 12 anni, e di 6 anni, che è quarto proporzionale in ordine alla metà di un anno, a due anni, e ad un anno e mezzo. Quindi l'attuale età del padre deve essere di anni 54, che è il triplo di 18, e 6 anni prima il figlio dovea avere anni 12, e l' padre anni 48, che è il quadruplo di anni 12.

P R O B L E M A V.

§. 223. *Trovare un numero da cui tolta la metà e 3 di più, e dal residuo tolta la terza parte e 5 di più, si abbia 14 per secondo residuo.*

Sol. Suppongasì, che il numero addimandato sia 70. Sarà la metà di esso uguale a 35, e la metà aumentata di 3 uguale a 38. Onde togliendo 38 da 70 si avrà per residuo il numero 32, di cui la terza parte addegua $10\frac{2}{3}$, e la terza parte aumentata di 5 pareggia $15\frac{2}{3}$. Il perchè se

da 32 si tolga $15 \frac{2}{3}$, dovrà restarvi $16 \frac{1}{3}$, che supera 14 per $2 \frac{1}{3}$. Adunque dalla posizione 70 si ha un errore di $\times 2 \frac{1}{3}$.

Suppongasi in secondo luogo, che il numero addimandato sia 60. Sarà la metà di esso aumentata di 3 uguale a 33. Onde togliendo 33 da 60, si avrà per residuo 27, di cui la terza parte, aumentata di 5 pareggia 14 che tolto da 27, darà per residuo 13. Ma tal residuo dovrebbe pareggiare 14. Dunque dalla posizione 60 si ha un errore di — 1.

Or poichè $\times 2 \frac{1}{3}$ è l'errore, che si ottiene dalla posizione 70, e — 1, è l'errore ottenuto dalla posizione 60; sarà $3 \frac{1}{3}$ la differenza degli errori ottenuti dalle precedenti posizioni. Il perchè la differenza $3 \frac{1}{3}$ degli errori dovrà stare ad

uno di essi come p. es. a $2 \frac{1}{3}$ nella ragione di 10 differenza delle posizioni 70 e 60 al quarto proporzionale 7. Ma l'errore $\times 2 \frac{1}{3}$ vien prodotto dalla posizione 70. Dunque il numero, che si domanda dee pareggiare 70 diminuito di 7 cioè 63. Di fatti se da 63 si tolga 34, 5, che è la metà di 63 aumentata di 3, e dal residuo 28,5 si tolga 14,5 che adegua la terza di 28,5 aumentata di 5, si otterrà 14 per residuo.

P R O B L E M A . V I .

§. 224. Tre fratelli hanno comprata una vigna per 10000 ducati. Il minore dice che egli avrebbe potuto solo acquistarla, se il secondo gli avesse data la metà del suo denaro: il secondo risponde, che se il maggiore gli avesse data la terza parte del suo denaro avrebbe solo acquistata la vigna; finalmente dice il maggiore, che egli avrebbe acquistata solo la vigna col suo denaro, e colla quarta parte di quello del minore. Si vuol sapere quanto denaro avea ciascuno dei tre fratelli.

Sol. Suppongasi primieramente, che il minore dei tre fratelli abbia ducati 8000.

Poichè la vigna è stata comprata per 10000 ducati e si è supposto, che il minore dei tre fratelli abbia ducati 8000, egli con altri 2000 ducati avrebbe solo acquistata la vigna. Ma il medesimo dice, che col suo denaro e colla metà di quello, che ha il secondo, potrebbe solo acquistare la vigna. Dunque se il terzo dei tre fratelli avesse 8000 ducati il secondo dovrebbe averne 4000, che è il doppio di 2000 ducati.

In oltre, poichè il secondo dei tre fratelli acquisterebbe solo la vigna col suo denaro, e colla terza parte di quello, che ha il maggiore; l'è chiaro, che se il secondo abbia 4000 ducati, la terza parte di quello che avrà il primo dovrà essere 6000 ducati, che è la differenza tra 'l prezzo 10000 ducati della vigna e 4000 ducati. Onde il primo dei tre fratelli dovrà avere 18000 ducati, che è il triplo di 6000 ducati. Ma il primo dice, che col suo denaro e colla quar-

la parte di quel del minore potrebbe solo acquistare la vigna. Dunque supponendo, che il terzo fratello abbia 8000 ducati, il costo della vigna per la terza condizione del Problema sarebbe di 20000 ducati, che è la somma di 18000 ducati, che ha il maggiore, e di 2000 ducati, che è la quarta parte di ciò che ha il minore. Ma la vigna è stata comprata per 10000 ducati. Dunque dalla posizione 8000 ducati, che si è adottata per dinotare il denaro del minore dei tre fratelli, risulta l'errore di $\times$ 10000 ducati.

Suppongasi in secondo luogo, che il minore dei tre fratelli abbia ducati 7000.

Poichè la vigna è stata comprata per ducati 10000, e si è supposto, che il minore dei tre fratelli abbia ducati 7000; egli con altri 3000 ducati acquisterebbe solo la vigna. Ma il medesimo dice, che col suo denaro e colla metà di quello, che ha il secondo, potrebbe solo acquistare la vigna. Dunque se il terzo dei tre fratelli avesse 7000 ducati, il secondo dovrebbe averne 6000, che è il doppio di 3000 ducati.

In oltre, poichè il secondo dei tre fratelli acquisterebbe solo la vigna col suo denaro e colla terza parte di quello, che ha il maggiore; l'è chiaro che se il secondo abbia 6000 ducati, il maggiore dovrà averne 12000, che è il triplo della differenza tra il prezzo 10000 ducati della vigna e il denaro 6000 ducati, che ha il secondo. Ma il maggiore dice, che col suo denaro, e colla quarta parte di quello del minore potrebbe solo acquistare la vigna. Dunque supponendo, che il terzo fratello abbia 7000 ducati, il costo della vigna per la terza condizione del Problema sarebbe di 13750 ducati, che è la

somma di 12000 ducati, che ha il maggiore, e di 1750 ducati che è la quarta parte di ciò che ha il minore. Ma la vigna è stata comprata per 10000 ducati. Dunque dalla posizione 7000 ducati, che si è adottata per dinotare il denaro del minore dei tre fratelli, risulta l'errore di $\times 3750$.

Or poichè $\times 10000$ ducati è l'errore, che si ottiene dalla posizione 8000 ducati, e $\times 3750$ è l'errore, che si ottiene dalla posizione 7000 ducati, sarà 6250 ducati la differenza degli errori ottenuti dalle precedenti posizioni. Il perchè dovrà stare $6250 : 3750$ come la differenza 1000 delle due posizioni 8000 e 7000 alla differenza 600 tra la seconda posizione 7000 e la vera. Dunque il minore dei tre fratelli dee avere 6400 ducati, e con ciò il secondo dee avere 7200 ducati, di cui la metà 3600 ducati è la differenza tra 'l costo della vigna e quello che ha il minore dei tre fratelli, ed il maggiore dee avere ducati 8400, che insieme con 1600 ducati quarta parte di quello, che ha il minore, dà il costo 10000 ducati della vigna.

C A P. X.

DELLE RAGIONI E PROPORZIONI ARITMETICHE.

§. 225. *Def. XLV.* Qualora due numeri, che sieno rapportati ad una stessa unità, si paragonano tra loro, coll' esaminare di quanto il primo di essi è maggiore, o minore del secondo; un tal paragone chiamasi *ragione aritmetica*, o *rapporto aritmetico*.

§. 226. *Def. XLVI.* I numeri, che si pa-

ragonano tra loro in una ragione aritmetica, si dicono *termini* della ragione: ed in particolare il primo di essi chiamasi *antecedente* della ragione aritmetica, e quello a cui si paragona dicesi *conseguente* della stessa ragione.

§. 227. *Scol.* La ragione aritmetica tra due numeri suol dinotarsi ponendo un punto tra l'antecedente e l'conseguente di essa ragione. Così, a cagion di esempio, volendo dinotare la ragione aritmetica di 11 a 7, si scrive 11. 7.

§. 228. *Def. XLVII.* La *quantità della ragione aritmetica* di due numeri è la differenza tra l'antecedente e l'conseguente di essa ragione: e la stessa si dirà *positiva* o *negativa*, secondo che l'antecedente di essa ragione sia minore o pure maggiore del conseguente.

§. 229. *Def. XLVIII.* Due ragioni aritmetiche diconsi *tra se uguali*, se uguali, ed ambedue positive o ambedue negative sieno le quantità di esse ragioni.

§. 230. *Cor.* Dunque se due ragioni aritmetiche sieno tra se uguali, uguali risulteranno quelle altre, che si avranno paragonando i conseguenti di esse ai rispettivi antecedenti.

§. 231. *Def. XLIX.* L'uguaglianza di due ragioni aritmetiche costituisce ciò che dicesi *proporzione aritmetica*.

§. 232. *Scol.* Ogni proporzione, aritmetica suol dinotarsi ponendo due punti tra l'conseguente della prima ragione di essa, e l'antecedente della seconda.

§. 233. *Def. L.* Una proporzione aritmetica dicesi *continua*, se il conseguente di una delle ragioni di essa pareggi l'antecedente dell'altra: e se ciò non si avveri, quella proporzione si dirà *discreta*.

§. 234. *Cor.* Dunque in ogni proporzione aritmetica continua vi si contengono tre numeri, di cui uno fa da conseguente in una ragione, e da antecedente nell'altra. Gli stessi numeri poi si dispongono in modo, che i termini uguali formino il secondo e l' terzo termine della proporzione.

PROP. XXXIX. TEOR.

§. 235. *In ogni proporzione aritmetica la somma dei termini estremi pareggia quella dei termini di mezzo.*

Dim. Sia la proporzione aritmetica 23.31:17.25. Dovrà (§. 229.) essere $31 - 23 = 25 - 17$: ed aggiungendo $23 + 17$ a questi residui uguali si avrà

$$31 - 23 + 23 + 17 = 25 - 17 + 23 + 17 ; \text{ cioè } 31 + 17 = 25 + 23.$$

Ma 25 e 23 sono i termini estremi dell' assunta proporzione aritmetica, e 31 e 17 sono quelli di mezzo. Dunque in ogni ec. C. B. D.

§. 236. *Cor. I.* Se di una proporzione aritmetica sia uguale a zero uno dei termini estremi, l' altro di questi dovrà pareggiare la somma dei termini di mezzo. E se di una proporzione aritmetica sia uguale a zero uno dei termini di mezzo, il rimanente termine di mezzo sarà uguale alla somma dei termini estremi. Così, a cagion d' esempio, se abbiassi la proporzione aritmetica 0. 7 : 11. 18; sarà (§. 235) $0 + 18$, cioè $18 = 7 + 11$: e se abbiassi la proporzione aritmetica 7.0:18.11; dovrà essere $7 + 11$ uguale a $0 + 18$, cioè a 18.

§. 237. *Cor. II.* Se tre numeri formino una

proporzione aritmetica continua, la somma del primo e del terzo dovrà pareggiare il doppio del secondo di essi. In fatti se stia $5.11:11.17$, dovrà essere (§. 235.)

$$5+17=11+11$$

§. 238. *Cor. III.* Dunque in ogni proporzione aritmetica discreta ciascuno dei ternini estremi pareggia la somma dei termini di mezzo diminuita dell'altro termine estremo, e ciascuno dei termini di mezzo pareggia la somma dei termini estremi diminuita dell'altro termine di mezzo. In fatti se abbiassi la proporzione aritmetica.

$23.31:17.25$, dev' essere (§. 235.)

$$31+17=25+23,$$

e togliendo 23 da queste somme uguali, si ha

$$31+17-23=25,$$

togliendo 25 dalle stesse somme, si ha

$$31+17-25=23,$$

e togliendo 31, si ottiene

$$17=25+23-31$$

§. 239. *Cor. IV.* In oltre se di una proporzione aritmetica continua se ne conoscano due termini, si potrà in facil modo determinare il rimanente. Così, a cagion di esempio, se di una proporzione aritmetica continua si conoscesse il primo termine 5, e'l secondo 11, si otterrà il terzo termine 17 di tal proporzione prendendo il doppio 22 del secondo termine 11 di essa, e sottraendo da 22 il primo termine 5 della stessa proporzione. Che se di una proporzione aritmetica continua si conoscano il primo e il terzo termine, il secondo termine di essa si avrà prendendo la metà della somma dei termini noti.

PROP. XL. TEOR.

§. 240. Se quattro numeri sieno tali che la somma del primo, e del quarto pareggi il secondo insieme col terzo quei quattro numeri dovranno formare una proporzione aritmetica.

Dim. Sieno i quattro numeri 23, 17, 11, e 5 tali, che $23+5$ sia uguale a $17+11$. Dico, che debba stare $23:17::11:5$.

Poichè essendo $23+5=17+11$; togliendo 17 da coteste uguali somme, dovrà risaltarne

$$23-17+5=11,$$

e togliendo 5 dai residui ottenuti, si avrà

$$23-17=11-5$$

Ma $23-17$ dinota la quantità della ragione aritmetica di 23 a 17, ed $11-5$ dinota la quantità della ragione aritmetica di 11 a 5. Dunque sono tra se uguali le quantità delle ragioni aritmetiche di 23 a 17, e di 11 a 5. E perciò dee stare $23:17::11:5$. C. B. D.

C A P. XI.

DELLE PROGRESSIONI GEOMETRICHE,
ED ARITMETICHE.

§. 241. Def. LI. Una serie di numeri, di cui ciascuno serba a quello, che lo segue, una costante ragione geometrica, dicesi *serie* o *progressione geometrica*.

Tale è la serie dei numeri 1, 2, 4, 8, 16, ec., di cui ciascuno serba a quello, che lo segue la ragione di 1:2.

§. 242. Cor. Dunque se in una serie geometrica si prendano due termini consecutivi tra

loro, e due altri anche consecutivi; questi quattro numeri dovranno formare una proporzione geometrica.

§. 243. *Scol.* Qualora vogliasi indicare, che i numeri, a cagione di esempio, 1, 2, 4, 8, 16 ec. formano una progressione geometrica, si dovrà scrivere

$\equiv 1:2:4:16:32:64:128:ec.$

§. 244. *Def. LII.* Una serie di numeri, di cui ciascuno serba a quello, che lo segue una costante ragione aritmetica, dicesi *serie o progressione aritmetica*.

Tal'è la serie dei numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11, ec., di cui ciascuno serba a quello, che lo segue la ragione aritmetica di 1:3.

§. 245. *Cor.* Dunque se in una progressione aritmetica si prendano quattro numeri, di cui il secondo segua al primo, e'l quarto al terzo quei quattro numeri dovranno formare una progressione aritmetica.

§. 246. *Scol.* Volendo indicare, che i numeri, a cagion d'esempio, 1, 3, 5, 7, 9, ec. formano una progressione aritmetica, si dovrà scrivere

$\div 1. 3. 5. 7. 9. 11. ec.$

§. 247. *Def. LIII.* Ogni progressione geometrica o aritmetica, i cui termini incominciando dal primo vadano sempre diminuendo, dicesi *decrecente*, o *convergente*. E si dirà *crescente*, o *divergente* ogni progressione geometrica o aritmetica, i cui termini incominciando dal primo vadano continuamente crescendo.

§. 248. *Def. LIV.* L'*esponente* di una progressione geometrica è il quoziente di uno dei

suoi termini per l'altro, che l' segue. E l' esponente di una progressione aritmetica è la differenza di due termini successivi di essa progressione.

PROP. XLI. TEOR.

§. 249. *Se tra ciascuna coppia di termini consecutivi di una progressione geometrica s' inserisca un medio geometricamente proporzionale; i termini della progressione, ed i medii geometricamente proporzionali inseriti tra essi termini dovranno formare una nuova progressione geometrica.*

Dim. Sia la progressione geometrica $\frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : \text{ec.}$ Dico, che se tra 1 e 4, tra 4 e 16, tra 16 e 64, ec. s' inserisca un medio geometricamente proporzionale; i medii geometricamente proporzionali inseriti tra i termini della progressione con questi termini stessi formeranno una nuova progressione geometrica.

Poichè il medio geometricamente proporzionale tra 1 e 4 è la radice quadrata 2 (§. 185.) del prodotto di 1 per 4: quello, che prendesi tra 4 e 16, è la radice quadrata 8 del prodotto di 4 per 16, ec.; è chiaro, che la ragione di 1 a 4 debba essere duplicata della ragione di 1 a 2, e che la ragione di 4 a 16 debba essere duplicata di quella di 4 ad 8, ec. Ma (§. 241.) sono uguali le ragioni di 1 a 4, di 4 a 16, ec. Dunque debbono essere tra se uguali le ragioni di 1 : 2, di 2 : 4, di 4 : 8, di 8 : 16, ec.; e perciò i numeri, 1, 2, 4, 8, 16, ec. debbono formare una progressione geometrica. C.B.D.

§. 250. *Se tra ciascuna coppia di termini consecutivi di una progressione aritmetica s'inserisca un medio aritmeticamente proporzionale; i termini della progressione ed i medii aritmetici inseriti tra essi formeranno una nuova progressione aritmetica.*

Dim. Sia la progressione aritmetica 0. 4. 8. 12. 16. ec: Dico, che se tra 0 e 4 s'inserisca un medio aritmeticamente proporzionale; tra 4 ed 8 un medio aritmeticamente proporzionale, ec.; i termini della progressione ed i medii aritmeticamente proporzionali inseriti tra essi formeranno una nuova progressione aritmetica.

Poichè essendo (§. 239.) la metà 2 della somma di 0 e 4 il medio aritmeticamente proporzionale tra 0 e 4, e la metà 6 della somma di 4 ed 8 il medio aritmeticamente proporzionale tra 4 ed 8, ec., ed essendo uguali le differenze tra 0 e 4, tra 4 ed 8, ec., saranno anche tra se uguali le differenze tra 0 e 2, tra 2 e 4, tra 4 e 6, tra 6 ed 8, ec. Dunque i numeri 0, 2, 4, 6, 8, ec. formano una progressione aritmetica. C. B. D.

C A P. XII.

DELLA NATURA ED INDAGINE DEI LOGARITMI.

§. 251. *Def. LV.* Se di rincontro ai termini di una progressione geometrica pongansi quelli di una progressione aritmetica; i numeri di questa seconda serie si dicono *logaritmi* dei corrispondenti termini della prima.

Esempio. I termini 1, 2, 4, 8, ec. della progressione geometrica (A) sieno di rincontro ai numeri 1, 2, 3, 4, ec. della progressione aritmetica (B). Sarà 1 il logaritmo di 1, 2 quello di 2, 3 quello di 4, 4 il logaritmo di 8, ec.

(A) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ec.

(B) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ec.

§. 252. *Cor. I.* Adunque se tra ciascuna coppia di termini consecutivi di una progressione geometrica s'inserisca un medio geometricamente proporzionale, e tra ciascuna coppia di termini consecutivi della progressione aritmetica, che ne dinotano i logaritmi dei corrispondenti termini della prima serie, vi s'inserisca un medio aritmeticamente proporzionale (§§. 249. 250.); questi medii aritmetici dovranno rispettivamente dinotare i logaritmi dei corrispondenti medii geometrici.

§. 253. *Cor. II.* E quindi se dopo di aver inseriti i medii geometricamente proporzionali tra i termini di una progressione geometrica, ed i medii aritmeticamente proporzionali tra i termini della progressione aritmetica; e che ne dinotano i logaritmi di quelli della serie geometrica, si facciano le medesime operazioni nelle due serie, che ne risultano, e ciò si continui a fare per un certo numero di volte; dovrà pervenirsi finalmente a due serie una geometrica e l'altra aritmetica, in ciascuna delle quali le differenze tra due termini consecutivi debbono essere picciolissime.

§. 254. *Cor. III.* Il perchè se dalle due serie assunte, geometrica ed aritmetica, se ne rinven-
gano nel modo indicato due altre, in ciascuna delle quali la differenza tra due termini consecutivi sia picciolissima; essendo i termini dell'as-

sunta serie aritmetica i logaritmi di quelli dell'assunta serie geometrica, anche i termini della serie aritmetica ottenuta dalla prima debbono esser logaritmi dei corrispondenti termini della serie geometrica ottenuta dalla prima serie geometrica.

§. 255. *Scol.* Di un numero qualunque i logaritmi possono essere infiniti, per esserne infinite le combinazioni delle differenti serie geometriche ed aritmetiche, i cui termini si stabiliscono di rincontro gli uni agli altri. Ora essendo i logaritmi di grandissimo vantaggio in molte operazioni; convien stabilire le due serie, che sieno le più facili a ritenersi, ed insieme ne agevolino le operazioni da farsi coi logaritmi. Per tal ragione Errico Briggio prescelse le due seguenti serie

<i>Serie geometrica Briggiana</i>	<i>Serie aritmetica Briggiana</i>
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
10000000	7
ec.	ec.

Adunque, secondo Briggio, zero è il logaritmo di 1, 1 il logaritmo di 10, 2 di 100, 3 quello di 1000, e così in seguito. E la fissazione delle due precedenti serie chiamasi *Sistema Briggiano*.

§. 256. *Def. LVI.* La base di un sistema logaritmico è quel numero, che in esso sistema ha per logaritmo 1.

§. 257. *Cor.* Dunque la base del sistema Briggiano è uguale (§. 255.) a 10.

§. 258. *Def. LVII.* Il *Canone logaritmico* è una tavola, ove ai numeri intieri incominciando da 1 fino ad un numero comunque grande, vi sono rapportati i logaritmi di essi per un qualunque sistema. Un tal registro di logaritmi chiamasi volgarmente *tavola logaritmica*.

§. 259. *Def. LVIII.* I logaritmi dei numeri calcolati nel sistema Briggiano diconsi *logaritmi volgari*, *tabulari*, o semplicemente *logaritmi*; poichè di essi suol farsene un uso più frequente, ed i loro valori sono rapportati nelle tavole logaritmiche.

§. 260. *Cor.* E poichè nel sistema briggiano zero è il logaritmo di 1, 1 quello di 10, 2 l'altro di 100, 3 quello di 1000, ec.; l'è chiaro, che il logaritmo di un numero maggiore di 1 e minore di 10 debba essere uguale ad un fratto vero; il logaritmo di un numero maggiore di 10 e minore di 100 debba essere uguale ad 1 aggiuntovi un fratto vero; il logaritmo di un numero maggiore di 100 e minore di 1000 debba essere uguale a 2 insieme con un fratto vero; ec. Ma i numeri maggiori di 1 e minori di 10 si scrivono con una sola cifra intiera; i numeri, che sono maggiori di 10 e minori di 100, si scrivono con due cifre intiere; quelli, che sono maggiori di 100 e minori di 1000, si scrivono con tre cifre intiere; ec. Dunque *la parte intiera del logaritmo di un qualunque numero maggiore di 1 contiene tante unità per quante sono le cifre intiere di esso numero diminuite di una.*

§. 261. *Scol.* Le frazioni, che debbono aggiungersi ai numeri 0, 1, 2, 3, ec. per ottenere i logaritmi dei numeri, che sono tra 1

e 10 , tra 10 e 100 , tra 100 e 1000 , ec. si riducono a fratti decimali , di 5 , 6 , 7 o più cifre , secondo l'esattezza ; che vuol darsi alle tavole logaritmiche.

§. 262. *Def. LIX.* Il numero intiero , che trovasi nel logaritmo di un qualunque numero , chiamasi *caratteristica* di quel logaritmo : e l'numeratore del fratto decimale , cui riducesi il fratto semplice adjacente alla caratteristica del logaritmo di un qualunque numero , chiamasi *mantissa* di esso logaritmo.

§. 263. *Cor. I.* Adunque dev' essere uguale a zero la caratteristica dei logaritmi dei numeri maggioiri di 1 e minori di 10 ; uguale ad 1 quella dei logaritmi dei numeri maggioiri di 10 e minori di 100 ; uguale a 2 quella dei logaritmi dei numeri maggioiri di 100 e minori di 1000 ; ec.

§. 264. *Cor. II.* In oltre , se la caratteristica del logaritmo di un numero sia uguale a zero ; esso numero dovrà contenere una sola cifra intiera : se quella caratteristica sia uguale ad 1 ; il numero dovrà contenere due cifre intiere , (§. 255.) ec.

§. 265. *Cor. III.* I logaritmi dei numeri della serie geometrica 1 , 10 , 100 , ec. non contengono mantissa.

PROP. XLIII. TEOR.

§. 266. *Se quattro numeri sieno geometricamente proporzionali , i logaritmi di essi dovranno essere aritmeticamente proporzionali.*

Dim. Sieno i numeri , 7 , 23 , 35 , e 115 geometricamente proporzionali. Dico , che i lo-

garitmi di essi debbano essere aritmeticamente proporzionali. Tra ciascuna coppia di termini consecutivi della serie geometrica briggiana 1, 10, 100, e 1000 s' inserisca un medio geometricamente proporzionale, e tra ciascuna coppia di termini consecutivi della serie aritmetica briggiana 0, 1, 2, e 3 s' inserisca un medio aritmeticamente proporzionale. Dovranno risultarne due serie, la prima geometrica e la seconda aritmetica, ed i termini della seconda saranno logaritmi dei termini della prima. In oltre, tra ciascuna coppia di termini consecutivi della serie geometrica ottenuta s' inserisca un medio geometricamente proporzionale, ed un medio aritmeticamente proporzionale s' inserisca tra ciascuna coppia di termini consecutivi dell' ottenuta serie aritmetica. Saranno i termini della seconda serie aritmetica ottenuta i logaritmi di quelli della seconda serie geometrica ottenuta. Egli è chiaro, che se tali operazioni si continuino fino a che risulti picciolissima la differenza tra due termini consecutivi dell' ultima progressione aritmetica, che ne risulta; prendendo in tal progressione quattro termini tali, che tra 'l primo e 'l secondo sè ne contengano tanti altri, quanti ve ne sono tra 'l terzo e 'l quarto; que' quattro termini dovranno essere aritmeticamente proporzionali; ed i numeri della serie geometrica, di cui que' quattro termini ne sono i logaritmi, dovranno essere geometricamente proporzionali, e viceversa. Il perchè se tra i termini dell' ultima progressione geometrica si contengono i numeri 7, 23, 35, e 115, i logaritmi di questi dovranno essere aritmeticamente proporzionali.

C. B. D.

§. 267. *Posto che il logaritmo di 1. sia zero; il logaritmo del prodotto di due numeri dovrà pareggiare la somma de' logaritmi di essi numeri.*

Dim. Sieno 7 e 23 due numeri, che moltiplicati tra loro ne danno per prodotto 161. Dovrà l'unità contenersi tante volte nel 7, quante volte il 23 dovrà contenersi in 161. E quindi dovrà stare $1 : 7 :: 23 : 161$. Ma qualora quattro numeri sono geometricamente proporzionali, i logaritmi di essi debbono essere aritmeticamente proporzionali. Dunque dee stare $\text{Log. } 1. : \text{Log. } 7 : \text{Log. } 23. : \text{Log. } 161$. Il perchè dev'essere (§. 236.) $\text{Log. } 161 = \text{Log. } 7 + \text{Log. } 23 - \text{Log. } 1$. Ma il logaritmo dell'unità si è supposto uguale a zero. Dunque dev'essere

$$\text{Log. } 161 = \text{Log. } 7 + \text{Log. } 23.$$

Vale a dire, che se il logaritmo dell'unità sia zero, il logaritmo ec. C. B. D.

§. 268. *Cor. I.* Se uno dei due fattori sia un numero della serie geometrica briggiana, di cui il logaritmo è privo di mantissa (§. 265.); la mantissa del logaritmo del prodotto sarà quella stessa del logaritmo dell'altro fattore, e la caratteristica del logaritmo del prodotto sarà quella dell'altro fattore aumentata di tante unità per quanti sono gli zeri, che trovansi nel primo fattore. In fatti essendo, a cagion di esempio, 700 il prodotto di 7 per 100, e il logaritmo briggiano di 100 uguale a 2; il logaritmo di 700 dev'essere uguale al logaritmo di 7 aumentato del numero intero 2.

§. 269. *Cor. II.* Essendo, a cagion di esempio, il prodotto di 7 per 7 uguale a 49 qua-

drato di 7, dovrà essere

$$\text{Log. } 7 + \text{Log. } 7 = \text{Log. } 49;$$

cioè

$$2\text{Log. } 7 = \text{Log. } 49,$$

e

$$\text{Log. } 7 = \frac{1}{2} \text{Log. } 49.$$

Dunque il *logaritmo del quadrato di un numero dev' essere quanto il doppio del logaritmo di esso numero: e la metà del logaritmo di un numero dee pareggiare il logaritmo della radice quadrata di esso numero.*

§. 270. *Cor. III.* In oltre, essendo il cubo 343 di 7 il prodotto di 7 per 49; dev' essere

$$\text{Log. } 7 + \text{Log. } 49 = \text{Log. } 343.$$

Ma Log. 49 pareggia (§. 269.) 2Log. 7. Dunque dev' essere

$$\text{Log. } 7 + 2\text{Log. } 7 = \text{Log. } 343,$$

o sia

$$3\text{Log. } 7 = \text{Log. } 343,$$

e

$$\text{Log. } 7 = \frac{1}{3} \text{Log. } 343.$$

Vale a dire, che il *logaritmo del cubo di un numero adègua il triplo del logaritmo di esso numero, e la terza parte del logaritmo di un numero pareggia il logaritmo della radice cubica di esso numero.*

PROP. XLV. TEOR.

§. 271. *Posto che il logaritmo di 1 sia zero; il logaritmo del quoto, che si ottiene dividendo un numero per un altro, dovrà pareggiare il logaritmo del dividendo diminuito del logaritmo del divisore.*

Din. Sieno 161 e 7 due numeri, di cui il primo diviso pel secondo dà per quoto 23. Dovrà l'unità contenersi tante volte nel quoziente 23, per quante volte il divisore 7 si dovrà con-

tenere nel dividendo 161. Il perchè dovrà stare $1 : 23 :: 7 : 161$, e (§. 266.) $\text{Log. } 1. \text{ Log. } 23 : \text{Log. } 7. \text{ Log. } 161$. E quindi dev'essere (§. 238.)

$\text{Log. } 23 = \text{Log. } 1 + \text{Log. } 161 - \text{Log. } 7$,
o, per esserne $\text{Log. } 1 = 0$,

$\text{Log. } 23 = \text{Log. } 161 - \text{Log. } 7$.

Dunque posto che il logaritmo dell'unità sia zero;
cc. C. B. D.

§. 272. *Cor.* E poichè ogni fratto ne dinota il quoto di una divisione, nella quale il numeratore fa da dividendo e l' denominatore da divisore (§. 53.); è chiaro, che il logaritmo di un fratto debba pareggiare il logaritmo del numeratore diminuito del logaritmo del denominatore.

§. 273. *Scol.* Dalla Prop. XLV. si rileva, che per determinare i logaritmi di tutt' i numeri, che vogliono inserirsi nelle tavole, basta assegnare soltanto i valori di quelli de' numeri primi, che sono minori del massimo numero da inserirsi nelle tavole; poichè sommando i logaritmi di più numeri primi si ottiene quello del prodotto di essi. Or affinchè la somma di due o più logaritmi riesca esatta fino ad una certa cifra decimale, come p. es. fino alla settima, l'è mestiere determinare i logaritmi de' numeri primi coll'approssimazione fino alla nona cifra decimale; poichè dalle somme delle none ed ottave cifre decimali può risultarne un aumento nella somma delle settime cifre decimali de' logaritmi de' numeri primi, del prodotto de' quali si voglia determinare il logaritmo. Ma il logaritmo di un qualunque numero si può determinare nella stessa guisa, che abbiamo indicato nella Prop. XLIII.

F I N E.

INDICE

171

AVVERTIMENTO.	Pag.	3
Nozioni preliminari al corso di Matematica		5

ISTITUZIONI DI ARITMETICA.

CAP. I. Principii generali della numerazione.	9
CAP. II. Del calcolo de' numeri intieri.	16
CAP. III. Del calcolo delle frazioni.	34
CAP. IV. Del calcolo dei fratti decimali.	58
CAP. V. Del calcolo de' numeri denominati.	71
CAP. VI. Del modo di formare il quadrato ed il cubo di un qualunque numero.	79
CAP. VII. Delle estrazioni delle radici quadrate e cubiche.	95
CAP. VIII. Delle ragioni e proporzioni geometriche.	
CAP. IX. Delle Regole, cui si riducono i problemi aritmetici.	121
Della Regola del Tre diretta semplice.	ib.
Della Regola del Tre composta diretta.	125
Della Regola del Tre inversa semplice.	127
Della Regola del Tre inversa composta.	128
Della Regola del Tre composta mista.	131
Della Regola di Alligazione.	134
Della Regola di Società.	138
Della Regola dell'interesse composto, che dicesi pure Regola di sconto, o d'interesse a scalare.	142

172

*Della Regola del Falso, o della falsa
posizione.*

145

CAP. X. *Delle ragioni e proporzioni arit-
metiche.*

155

CAP. XI. *Delle progressioni geometriche,
ed aritmetiche.*

159

CAP. XII. *Della natura ed indagine dei
logaritmi.*

162

~~AD 1475535~~

AD 1475513

fig.

fig.



